



LA FORMULACIÓN Y ARGUMENTACIÓN DE CONJETURAS EN CONTEXTOS DE INCERTIDUMBRE POR ESTUDIANTES DE SECUNDARIA (12-16). RETOS PARA LA ENSEÑANZA

**A formulação e argumentação de conjeturas em contextos de incerteza por
estudantes do ensino médio (12-16). Desafios para o ensino**

**Formulating and arguing conjectures in contexts of uncertainty by secondary
school students (12-16). Challenges for teaching**

Mireia de Cervelló Minyana Pastor¹

Universitat de València-UVEG (València, España)

Manuel Pedro Huerta Palau²

Universitat de València-UVEG (València, España)

Resumen

Este trabajo tiene por objetivo explorar la competencia en la formulación y verificación de conjeturas en contextos de incertidumbre, entendida como un proceso de resolución de problemas. Para ello, se lleva a cabo un experimento de diseño que implica el diseño de dos cuestionarios (pretest y postest) y el de una enseñanza basada en el método de resolución de problemas de probabilidad por simulación (MRPPS). Los datos del pretest se analizan de un modo cualitativo atendiendo a cuatro de las variables con las que se puede describir el proceso cognitivo de formulación y verificación de conjeturas: comprender el problema, formular la conjetura, analizar los datos y verificar la conjetura. Además, los resultados del pretest muestran que la competencia en formular y verificar conjeturas está influida por múltiples factores, en particular por el significado y uso de la idea de hipótesis, de muestra y de muestreo, lo que permite el diseño posterior de la enseñanza. Los resultados del postest, por su parte, muestran cómo, fruto de la enseñanza, el alumnado transita de un modo ordenado a lo largo del proceso cognitivo, dotando de sentido a las ideas de hipótesis, muestra y muestreo en función del contexto.

Palabras clave: Conjeturas estocásticas, Argumentar, Resolución de problemas (MRPPS), Propuesta de enseñanza, Educación secundaria.

Resumo

Este artigo tem como objetivo explorar a competência na formulação e verificação de conjeturas em contextos de incerteza, entendida como um processo de resolução de problemas. Para tal, é realizada uma experiência de design que envolve a elaboração de dois questionários (pré-teste e pós-teste) e um ensino baseado no método de resolução de problemas de probabilidade de simulação (MRPPS). Os dados do pré-teste são analisados qualitativamente, tendo em conta quatro das variáveis que podem ser utilizadas

*Autor de correspondencia: mireia.minyana@uv.es (M. de C. Minyana Pastor)

¹ <https://orcid.org/0009-0007-6496-860X> (mireia.minyana@uv.es).

² <https://orcid.org/0000-0003-2802-9203> (manuel.p.huerta@uv.es).

para descrever o processo cognitivo de formulação e verificação de conjeturas: compreensão do problema, formulação da conjetura, análise dos dados e verificação da conjetura. Além disso, os resultados pré-teste mostram que a competência na formulação e validação de conjeturas é influenciada por múltiplos fatores, nomeadamente pelo significado e utilização da ideia de hipótese, amostra e amostragem, o que permite o posterior desenho do ensino. Os resultados do pós-teste, por sua vez, mostram como, em consequência do ensino, os alunos se movimentam de forma ordenada pelo processo cognitivo, dando sentido às ideias de hipótese, amostra e amostragem com base no contexto.

Palavras-chave: Conjetura, Argumentação, Conjetura estocástica, Resolução de problemas, Ensino secundário.

Abstract

This paper aims to explore the competence in formulating and verifying conjectures in contexts of uncertainty, understood as a problem-solving process. To this end, a design experiment is carried out involving two questionnaires (pretest and posttest) and a teaching approach based on the simulation-based probability problem-solving (SPS) method. The pretest data are analyzed qualitatively, considering four of the variables that can be used to describe the cognitive process of formulating and verifying conjectures: understanding the problem, formulating the conjecture, analyzing data, and verifying the conjecture. Furthermore, the results show that the competence in formulating and validating conjectures is influenced by multiple factors, particularly the meaning and use of the ideas of hypothesis, sample, and sampling, which allows for the subsequent design of the teaching approach. The posttest results, for their part, show how, as a result of the teaching, students move in an orderly manner through the cognitive process, giving meaning to the ideas of hypothesis, sample, and sampling based on the context.

Keywords: Stochastic conjectures, Argumentation, Problem solving (MRPPS), Teaching proposal, Secondary education.

Recibido: 10/04/2025 - Aceptado: 25/07/2025

1. INTRODUCCIÓN

Diversos autores sugieren que el razonamiento matemático surge solo cuando se formulan conjeturas o proposiciones (matemáticas) cuya verdad debe ser justificada o demostrada (Ciccolini y Stylianides, 2020). En la misma línea, resulta razonable conjeturar que el razonamiento estocástico se activa cuando se formulan conjeturas (“estocásticas”) cuya validez ha de ser argumentada en términos de credibilidad, fiabilidad o probabilidad. Mientras que la demostración y el razonamiento deductivo deciden, de un modo objetivo, si una conjetura matemática es verdadera o falsa —aceptándola como proposición matemática o refutándola—, en el contexto de la aleatoriedad y la incertidumbre tratar con conjeturas requiere de un método y de una forma de razonamiento distinta para decidir, de un modo subjetivo, si la conjetura es plausible, creíble, fiable o probable: el razonamiento estocástico.

Desde un punto de vista curricular, en España y en países del entorno de la OCDE (Banting et al., 2018), la enseñanza de la probabilidad y la estadística ha ido evolucionando a lo largo de los últimos años, al

menos en teoría. En efecto, pese a los avances en investigación, la enseñanza parece comportarse, en la práctica, de un modo conservador, tanto en sus contenidos como en sus métodos y modos de enseñanza; a pesar de los constantes retos que la sociedad de hoy le demanda (Watson y Smith, 2022). Así, las leyes educativas españolas (RD 217/2022, de 29 de marzo) proponen un enfoque novedoso del currículum de matemáticas para la enseñanza secundaria obligatoria, basado en competencias específicas y los sentidos matemáticos (Martín, 2022). En particular, se menciona la competencia específica: “Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación, para generar nuevo conocimiento”. Se introduce la noción de saberes básicos de la materia que, en el caso del sentido estocástico, se pone el énfasis en la interpretación de datos o la toma de decisiones a partir de información estadística y su valoración crítica, considerados aspectos básicos en una enseñanza de la probabilidad y estadística acorde con los retos del siglo XXI. En este sentido, Banting et al. (2018) y Pratt (2011) cuestionan la tendencia de presentar la noción de probabilidad casi exclusivamente por medio de escenarios en los que la incertidumbre (en el sentido de Moore, 1990) o la aleatoriedad parecen ausentes. Además, cualquier información requerida para su cálculo está disponible, se proporciona o se presupone de inmediato, información que parece completamente fiable sin tener que estar sujeta a conjeturas. Piénsese para ello, por ejemplo, en escenarios habituales con dados, monedas, cartas o ruletas sobre los que se suele apoyar la enseñanza tradicional y que no suele introducir otros significados de la probabilidad distintos del laplaciano o clásico en detrimento de otros, como el frecuentista o subjetivo (Borovcnik y Kapadia, 2018). Tales escenarios pueden dar la impresión al alumnado de que la probabilidad es un atributo fijo de los objetos en dichos escenarios, oscureciendo la idea más amplia de que la probabilidad de un suceso es, más bien, una enumeración de la información disponible sobre el comportamiento del suceso en dichos escenarios, la cual puede estar sujeta a cambio (Banting et al., 2018). En efecto, la hipótesis de la equiprobabilidad ni siquiera es cuestionada en el aula; sino que se presenta como una característica inherente de los dados, las monedas o las cartas, que son calificados como “justos” —lo sean o no—, en lugar de ser reconocida como lo que realmente es: una hipótesis. Banting et al. (2018) sugieren que, para romper esta tendencia, se deberían proporcionar escenarios de resolución de problemas en los que el alumnado tenga la oportunidad de formular y argumentar sobre conjeturas estocásticas, examinando las suposiciones (hipótesis) que subyacen a una información dada sobre dichas conjeturas. De esta manera, es posible que el alumnado aprecie la naturaleza de la probabilidad como una declaración de certeza, credibilidad, fiabilidad de dicha conjetura, susceptible de cambiar en base a nueva información y/o a nuevas hipótesis

sobre qué, cómo y cuándo se obtuvo la información. La oportunidad de involucrar al alumnado con tales problemas puede no solo ayudar a formarse en la citada competencia, sino también a adquirir una posición crítica hacia las afirmaciones probabilísticas y estadísticas y a incentivar el desarrollo de la cultura estocástica y el pensamiento crítico.

Si bien la relación entre la formulación de conjeturas matemáticas y la prueba o demostración ha sido ampliamente investigada, la relación entre conjeturas “estocásticas” y su verificación, credibilidad, fiabilidad o probabilidad apenas si ha sido tratada, pasando desapercibida para la investigación en educación estocástica. Así, por ejemplo, poco se sabe sobre cómo es el proceso de formular conjeturas en contextos de incertidumbre; qué relación de dependencia hay entre las hipótesis previas a la formulación de una conjetura y la conjetura finalmente formulada en función de nuevas informaciones sobre el proceso y el suceso de los que se conjetura algo; cómo es el proceso de verificar una conjetura; y cómo, para ello, se dota de sentido estocástico (Martín, 2022; Minyana y Huerta, 2022) a los conceptos y procesos. Poco se sabe también qué relación de dependencia hay, si la hay, entre las dificultades del alumnado con las ideas de muestreo y muestra (Watson y Moritz, 2000; Ruiz-Reyes y Contreras, 2021) y la formulación y argumentación de conjeturas sobre una determinada población.

Algunas de estas cuestiones se tratan en este trabajo de investigación de un modo exploratorio y en diferentes escenarios. La investigación tiene como objetivo aportar elementos que permitan mejorar la enseñanza del razonamiento estocástico en la formulación y verificación de conjeturas estocásticas desde un punto de vista competencial. Para ello, se elabora y se lleva a cabo un experimento de diseño (Cobb y Clain, 2004), cuyo objetivo es dotar de sentido a dicha competencia mediante la formulación de conjeturas y la correspondiente argumentación para su verificación, apoyándose en una enseñanza basada en el método de resolución de problemas de probabilidad por simulación (Huerta, 2018).

Se adopta un enfoque de enseñanza que se distancia del modelo tradicional y se articula alrededor de la dialéctica hipótesis-conjetura (Huerta, 2020), enmarcado en un contexto de resolución de problemas. Tanto la naturaleza de los problemas propuestos, como la disposición favorable del alumnado a formular conjeturas (“conjecturing stance” en Ciccolini y Stylianides, 2020), el enfoque investigativo en la resolución del problema o el papel del profesorado como gestor y mediador —o intermediario (“middleman”, en el sentido de Banting et al., 2018)— en el proceso de resolución, son algunos de los aspectos claves en el diseño de la enseñanza.

2. REVISIÓN DE LA LITERATURA

Parece haber cierto consenso en la importancia que tiene introducir la formulación y argumentación de conjeturas en la enseñanza de las matemáticas como una actividad propia del quehacer matemático, aunque alejada de la realidad de las aulas (De Villiers y Heideman, 2014; Ciccolini y Stylianides, 2020). Generalmente, se entiende que las conjeturas son o han de ser matemáticas y que la argumentación tiene que ver con una demostración o prueba (Fatmanissa et al., 2024), olvidando, con algunas excepciones (Liu y Ho, 2008), la existencia de otras conjeturas que no son matemáticas y que no requieren de una prueba matemática para ser aceptadas; así ocurre en contextos de incertidumbre.

Desde un punto de vista competencial, la investigación sobre formular conjeturas y argumentar sobre su validez, en términos de credibilidad, fiabilidad o probabilidad es más bien escasa. Huerta (2020) reflexiona, desde un punto de vista filosófico, epistemológico y didáctico, en torno a esta competencia. Esta reflexión le lleva a aventurar las dificultades que podría tener el profesorado al introducir y desarrollar esta competencia de un modo adecuado, cuando la propia tradición escolar, los libros de texto y la escasa preparación del profesorado no parecen facilitar esta tarea. Huerta (2020) distingue, además, lo que separa a los procesos de verificación de conjeturas formuladas en contextos matemáticos de las formuladas en contextos de incertidumbre y que, yendo por caminos paralelos, divergen al final en la prueba de su verdad, para las primeras, o de su credibilidad, fiabilidad o probabilidad para las segundas. Al mismo tiempo, Huerta (2020) identifica el proceso de formular y probar conjeturas matemáticas con el proceso de resolver problemas que Lakatos (1976) y Polya (1966) llaman de encontrar y probar. Y del mismo modo, identifica el proceso de formular conjeturas estocásticas con el de resolver problemas de encontrar (la conjetura) y argumentar para convencer (a uno mismo y a los demás) de la bondad, credibilidad, fiabilidad o probabilidad de la conjetura. Precisamente, en las matemáticas escolares, la comparación entre el par problema-conjetura matemática, de un lado, con problema-conjetura estocástica, de otro, puede ser fuente añadida de dificultades para el alumnado pues la tradición escolar potencia el primero en detrimento del segundo.

La investigación se ha interesado básicamente en estudiar procesos de formulación y demostración de conjeturas matemáticas en cualquier nivel educativo (Cañadas et al., 2007; Astawa et al., 2018; Fiallo y Gutiérrez, 2017; Rabbani y Herman, 2017), incluso con matemáticos profesionales (Gavilán-Izquierdo y Fernández-León, 2023), aunque apenas hay constancia de trabajos de investigación en contextos de incertidumbre con conjeturas estocásticas. En cambio, tradicionalmente, estas están presentes —de un

modo u otro— en, por ejemplo, procesos de modelización, como en Chaput et al. (2011); de simulación, como en Shaughnessy (1983), Benson y Jones (1999) o Zimmermann (2002); en el contraste de hipótesis, como en Batanero y Borovnick (2016); en la resolución de problemas de probabilidad, como en Huerta (2018); o formando parte de las componentes del proceso de inferencia estadística informal (IEI), como en Makar y Rubin (2018).

Por otro lado, Astawa et al. (2018) investigan el proceso cognitivo empleado en la formulación y validación de conjeturas matemáticas por un grupo de seis alumnos de ambos géneros, heterogéneo en cuanto a sus habilidades matemáticas. Los autores descomponen el proceso en cinco etapas: comprender el problema, explorar el problema, formular la conjetura, justificar la conjetura y probar la conjetura. Este proceso puede identificarse como un proceso de resolución de problemas de encontrar (la conjetura) y probar (que la conjetura es cierta) de Lakatos (1976) y Polya (1966), mencionados con anterioridad. Pero no tenemos constancia de trabajos previos que describan el proceso cognitivo del alumnado ante las conjeturas estocásticas. En contextos de incertidumbre, la idea de “problema estocástico” difiere de la idea común de problema de matemáticas. Mientras que en el primero la información disponible son los datos que provienen de fenómenos aleatorios en un contexto particular y más de una conjetura es posible; en el segundo la información se refiere a propiedades matemáticas de objetos, en la que solo una conjetura es posible. Por su parte, una probabilidad determinará qué conjetura estocástica es más o menos creíble o fiable entre las posibles; en el otro caso, será una demostración matemática la que diga si la conjetura es verdadera o falsa.

Un ejemplo con el que intuir cierta distancia entre procesos cognitivos puede verse al comparar estas dos tareas: a) establecer una conjetura para el valor de la suma de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera y b) establecer una conjetura para apostar por un determinado resultado en el lanzamiento de un dado el cual, durante 100 o 1000 lanzamientos, ha mostrado un determinado comportamiento. El problema no es solo formular la conjetura sino argumentar sobre el grado de validez o credibilidad de dichas conjeturas.

En este trabajo, adaptaremos el modelo descrito por Astawa et al. (2018) para explorar el comportamiento del alumnado en el proceso de formulación de conjeturas estocásticas en cuatro etapas: comprensión del problema estocástico, el análisis de los datos, la formulación de la conjetura y la argumentación sobre la credibilidad, fiabilidad o probabilidad de la conjetura formulada.

3. MARCO TEÓRICO Y MÉTODO

3.1. Marco teórico

En muchas ocasiones oímos hablar indistintamente de hipótesis o conjetura para referirse a un “juicio o a una suposición sobre algo basado en indicios o suposiciones” (Real Academia Española, s.f, definición 1). Pero, formalmente hablando, ambos términos son distinguibles tanto desde el punto de vista filosófico, como matemático o estocástico (Huerta, 2020). Las conjeturas, por ejemplo, se transforman en hipótesis en un contraste de hipótesis (Batanero y Borovnick, 2016), pero afirmar que al lanzar una moneda al aire los resultados posibles, cara y cruz, tienen la misma probabilidad de ocurrencia es una conjetura estocástica y argumentar sobre su fiabilidad o credibilidad o bien se basa en una hipótesis (equiprobabilidad) o en la información que proporciona la experimentación con dicha moneda.

Distinguimos pues entre conjetura matemática, esto es, aquella conjetura formulada en un contexto puramente matemático, que se basa en propiedades matemáticas de los objetos matemáticos a los que hace referencia y que requiere demostrarse que es cierta o falsa (Astawa et al., 2018; Ciccolini y Stylianides, 2020); de conjetura estocástica, como aquella que surge en un contexto de incertidumbre, que se fundamenta en informaciones o datos de tipo probabilístico o estadístico y de la que no se puede predicar si es verdadera o falsa sino fiable, creíble o probable. Conjeturar que “la suma de los ángulos de todo triángulo es igual a dos ángulos rectos” da lugar a una conjetura matemática, pero “pronosticar que va a llover en las próximas horas” da lugar, en este trabajo, a una conjetura estocástica cuya fiabilidad se expresa mediante una probabilidad de ocurrencia (Viñas et al., 2018).

Por otro lado, como ya se ha dicho, el proceso de conjeturar puede verse como un proceso de resolución de problemas. En efecto, dado un problema formulado en un contexto de incertidumbre, el proceso de resolución implica: 1) formular una conjetura plausible, razonable, a partir de los datos del problema, datos que pueden derivarse tanto de informaciones probabilísticas como estadísticas o de ambas, en el contexto particular en el que se ubique la situación problemática y 2) argumentar en favor, o en contra, de la bondad, fiabilidad, credibilidad o probabilidad de verificarse la conjetura según las informaciones y datos disponibles. Cada una de estas dos partes del proceso puede descomponerse, a su vez, en varias etapas a lo largo del proceso cognitivo pudiéndose poner en correspondencia con las etapas del método de resolución de problemas de probabilidad por simulación (MRPPS) de Huerta (2018), tomado como modelo para el diseño de la enseñanza (Tabla 1).

Tabla 1

Proceso cognitivo en la formulación y argumentación de conjeturas y su correspondencia con el MRPPS como modelo de enseñanza para la adquisición de la competencia: Formular y argumentar conjeturas estocásticas

Proceso cognitivo para la formulación y argumentación de conjeturas estocásticas (adaptado de Astawa et al., 2018)	Método de resolución de problemas de probabilidad por simulación (Huerta, 2018). Pasos o etapas
Comprender el problema	1. Exploración de la situación real (problema original (PO)), identificación de lo que está sujeto a incertidumbre y de lo que no lo está, de lo que es conocido y desconocido en el PO
Formular conjeturas	2. Juicios subjetivos (conjeturas) a priori derivados del análisis del PO
Fiabilidad, credibilidad de las conjeturas formuladas	3. Fiabilidad o credibilidad de las conjeturas formuladas
Obtención y recogida de datos	4. Simulación: necesidad, diseño y uso de generadores o herramientas de azar. El problema simulado (PS), uso de herramientas tecnológicas
Análisis de datos	5. Simulación productora de información dependiente de la herramienta usada. Tratamiento de la información. El problema estocástico dependiente del número de simulaciones
Validación de conjeturas	6. Equivalencia entre el PO y el PS y entre las conjeturas formuladas respectivamente
Reflexión	7. De la conjetura del PS a la conjetura como solución del PO
Comunicación de los resultados	8. Retorno de la nueva conjetura al PO: utilidad y fiabilidad

3.2. Método

El tipo de investigación que se desarrolla en este trabajo se corresponde con un experimento de diseño (Cobb y Mc Clain, 2004) que contempla dos aspectos relevantes: el diseño e implementación de una experiencia de aprendizaje de una competencia específica: la formulación y argumentación de conjeturas estocásticas y la observación y exploración del comportamiento del alumnado en la adquisición de dicha competencia, antes y después de la enseñanza.

3.2.1. Instrumentos

El experimento implica el diseño de dos cuestionarios, uno inicial (pretest), de carácter diagnóstico, y otro final (postest), con el que se exploran los efectos de una enseñanza diseñada a partir de los primeros

pasos del MRPPS (ver Tabla 1). El pretest fue administrado la última semana de octubre de 2024 y el posttest la tercera semana de diciembre de 2024, ambos en una sesión de 55 minutos en un aula ordinaria.

3.2.1.1 Cuestionarios

Para la elaboración del pretest (Tabla 2) que evalúe la competencia del alumnado en la formulación y argumentación de conjeturas estocásticas, se crea una batería de problemas y cuestiones, tomadas de fuentes variadas que van desde libros de texto a la inteligencia artificial, con formatos variados en cuanto a contextos y situaciones, datos, vocabulario y tipología de respuesta. La finalidad de esta batería inicial es llevar a cabo una primera exploración sobre la actuación del alumnado de secundaria ante este tipo de problemas y situaciones, de tal forma que su resultado permita seleccionar el formato más adecuado de los ítems del pretest para ser administrado en un entorno natural de clase, durante los 45-55 minutos disponibles, a alumnado de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) de 12 a 16 años.

Tabla 2

Esquema de los ítems del pretest y posttest

Situación	Juegos de azar (ítems 1, 2 y 7)	Social (ítems 3, 4 y 6)	Salud (ítem 5)
Contexto	Monedas, bolas en bolsas opacas, ruleta, dados	Instagram, Netflix, notas escolares, puntuación de un equipo, demografía, uso teléfono móvil, temperaturas	Efectividad de vacunas, efectividad medicación
Objetivo	Explorar la relación hipótesis-conjetura. Influencia de la hipótesis frente a la evidencia que proporcionan los datos experimentales	En ausencia de hipótesis previas: fuerza de los datos de una muestra como evidencia en favor de una conjetura. Fuerza del proceso de muestreo sobre la formulación y argumentación de conjeturas	
Información disponible en el enunciado (datos)	Distribución de los resultados de N pruebas (numérico, simbólico)	Distribución de frecuencias/porcentajes o gráficos de una distribución de los valores de una muestra (de tamaño N) de una variable aleatoria dicotómica	
Términos usados	Conjetura, creíble, argumentar, apostar por y predicción de futuro	Opción más probable (como conjetura), probabilidad, argumentar opción más probable, conjetura como predicción, piensas (...) más probable, razonable, piensas (...) creíble, convencer	

La batería de problemas y cuestiones se organiza en cuestionarios de cinco ítems cada uno que se administran por los respectivos profesores y profesoras a 65 estudiantes de 1º de ESO y 37 de 4º de ESO

la última semana de septiembre de 2024, quienes no participan posteriormente en el experimento de diseño. El profesorado colaborador tiene las instrucciones precisas sobre cómo actuar durante la administración, como, por ejemplo, no proporcionar ayudas innecesarias, anotar dificultades de comprensión de los ítems o el tiempo empleado por el alumnado en completar el cuestionario.

El análisis de las respuestas, que se detalla más adelante, permite precisar las características de los ítems del pretest. Razones de espacio y tiempo observadas durante la realización de estas pruebas iniciales determinaron que el pretest se organizara en cuestionarios isomorfos, que se definiera la cantidad de ítems en cada uno de ellos y la facilidad para formular una conjetura. De esta forma, el pretest se diseñó con tres opciones (A, B, C), isomorfas entre ellas y con siete ítems cada una. El formato de respuesta es de elección múltiple con cuatro opciones, a la que se añade una pregunta adicional, en formato de respuesta libre, que solicita al alumnado un argumento que valide la opción escogida como su mejor conjetura. Los contextos que se consideran son: juegos de azar, habituales en la enseñanza; un contexto social con el que el alumnado se encuentre familiarizado (redes sociales, rendimiento académico o clima) y el contexto de la salud. Por último, el formato de datos usado pretende facilitar al alumnado dotar de sentido a la información de tipo estocástico que se le proporciona en el contexto particular en el que se formula el ítem. Estos datos se expresan por medio de frecuencias y porcentajes, así como por medio de representaciones habituales en la enseñanza: tablas, gráficos y diagramas.

El postest (Tabla 2) con el que se pretende observar el efecto de la enseñanza, mantiene la misma estructura y criterios con los que se construye el pretest, isomorfo a él, con opciones A, B, y C y siete ítems en cada opción, aunque incorpora el vocabulario introducido durante la enseñanza.

Como ejemplo de ello, la Figura 1 muestra los ítems 1, 2 y 4 del pretest:

Figura 1

Ítems 1, 2 y 4 del pretest

ÍTEM 1 Se ha lanzado una moneda y se han obtenido los siguientes resultados: C, C, +, C, +, C, C, C, +, C. Se vuelve a lanzar la moneda, ¿cuál de las siguientes opciones sería tu mejor conjetura? Señala una opción. a) Apostaría por C b) Apostaría por + c) Me da igual apostar por C o por +, puede salir tanto C como + d) Apostaría que la moneda está trucada ¿Por qué la opción que has escogido te parece la más creíble? Explícalo.
ÍTEM 2 Se lanza la moneda anterior 100 veces y ha salido 75 veces cara y 25 veces cruz. Se lanza de nuevo la moneda, ¿cuál sería ahora, entre las opciones siguientes, tu mejor conjetura sobre el resultado del próximo lanzamiento? Señala una opción. a) Saldrá cara b) Saldrá cruz c) Puede salir tanto cara como cruz d) La moneda está trucada ¿Por qué la opción has escogido te parece la más creíble? Explícalo.
ÍTEM 4 Un estudiante siempre ha obtenido calificaciones altas en matemáticas como se muestra a continuación: 8,5 - 9,0 - 8,0 - 9,5 - 8,0 - 9,0. ¿Qué piensas que sacará en su próximo examen de matemáticas? Señala una opción. a) Obtendrá una calificación alta Si marcas esta opción di la nota o entre qué valores esperas que esté la nota de su próximo examen b) Puede obtener tanto una calificación alta como baja c) Obtendrá una calificación alta Si marcas esta opción di la nota o entre qué valores esperas que esté la nota de su próximo examen d) La nota de su próximo examen no depende de las anteriores ¿Por qué crees que la opción que has escogido es la más creíble? Explícalo

3.2.1.2. Instrumentos de análisis de los cuestionarios

Los cuestionarios con la batería de problemas y cuestiones previas al pre y postest se analizan atendiendo a la presencia o ausencia en las respuestas de cuatro de las variables del proceso cognitivo (Tabla 1). La presencia o no se identifica con 1 o 0, respectivamente, según los descriptores que se detallan a continuación, lo que da una idea de la actuación del alumnado en el cuestionario y de las dificultades de los ítems propuestos. Con el fin de corroborar los valores 1 y 0 asignados, se escoge una muestra del alumnado participante para ser entrevistado y confirmar dicha asignación. Los descriptores se detallan a continuación:

- Comprensión del problema: Decimos que el alumnado entiende o comprende el problema (1) cuando entiende el proceso aleatorio que se describe en el ítem, responde a la pregunta que se le formula y lo hace de alguna forma coherente y argumentada (ya sea por los datos, creencias, intuiciones, experiencia) y no de una manera aleatoria y sin ningún tipo de argumentación (0).

- b) Formulación de una conjetura: Decimos que el alumnado formula una conjetura cuando elige de un modo intencionado, pero no aleatoriamente, una de las opciones que se le presenta (1). Esta conjetura puede estar basada tanto en los datos como en posiciones personales de opinión, creencia o intuición, pero la elección es coherente (de alguna forma) con la posterior argumentación. En otro caso (0).
- c) Análisis de datos: Decimos que el alumnado analiza los datos (la información que le proporciona el ítem) si en la argumentación posterior hace referencia a ellos, de un modo global, puntual o local cuando valida la conjetura. Esto permite analizar hasta qué punto se recurre a los datos en las argumentaciones sobre las conjeturas; aunque no los use necesariamente.
Valoramos con (1) tanto si el análisis de los datos es global, puntual o local. En otro caso (0).
- d) Validación de la conjetura (argumentación): Decimos que el alumnado valida “su” conjetura si la hace plausible, fiable o creíble como consecuencia del análisis anterior. Podemos valorar con 1 aquellas argumentaciones que analizan la información del ítem para validar “su” conjetura o que estén basadas en opiniones propias, creencias o intuiciones que tengan fundamentos estadísticos intuitivos e informales.

Cabe señalar que en este trabajo no se presta atención a la tipología de las conjeturas formuladas, lo que daría lugar a otro trabajo de investigación, sino a la coherencia del proceso cognitivo del alumnado cuando se tiene en cuenta todo el proceso, independientemente de la conjetura formulada. No obstante, dichas conjeturas no son independientes de algunos factores que se insinúan como influyentes en la decisión de apostar en favor de una opción u otra entre las disponibles en el cuestionario. Así, el comportamiento del alumnado en los cuestionarios definitivos (pre y postest) se analiza, en primer lugar, en función de las situaciones en las que se pueden agrupar los ítems de los cuestionarios (Tabla 2). En segundo lugar, derivado de la observación de la actuación del alumnado en la batería inicial de ítems, el análisis se centra en explorar las siguientes relaciones atendiendo a la situación y al contexto particular en la que se solicita formular y argumentar una conjetura:

- Relación hipótesis-conjetura. Se explora la presencia, de forma explícita o implícita de hipótesis previas a la formulación de una conjetura y la influencia que pueden llegar a tener en su argumentación.
- Relación entre el origen de los datos y la formulación de la conjetura. Se explora la influencia y la fuerza que tienen los datos, sobre otros aspectos del contexto, en la formulación de las conjeturas y su argumentación.

- Relación entre el muestreo y la formulación de conjeturas. Se exploran los aspectos conceptuales del muestreo y de inferencia que pueden ser influyentes en la formulación y argumentación de una conjetura.

Los instrumentos de análisis descritos proporcionan un gran volumen de información que pueden dar lugar a investigaciones en más de una dirección. En este trabajo, no obstante, los datos se consideran desde una perspectiva global, sin estudio de casos, se tratan cualitativamente de tal modo que cualquier cambio en el comportamiento del alumnado en el postest se interpreta en relación con la enseñanza diseñada.

3.3. Muestra

En el trabajo, por su carácter exploratorio, se han utilizado diferentes muestras según el caso. Así, la batería inicial de problemas y cuestiones se administra a un total de 102 estudiantes (65 de 1º de ESO y 37 de 4º de ESO), el pretest a 31 (11 de 1º de ESO y 20 de 4º de ESO), el proceso de enseñanza a 21 estudiantes de 4º de ESO y el postest se ha implementado a 20 estudiantes de 4º de ESO, siendo, finalmente, un total de 19 estudiantes (cinco chicos y 14 chicas) de 4º de ESO quienes han completado las tres etapas (pretest, proceso de enseñanza y postest) pues un alumno realizó el pretest pero no el postest y en otro caso una alumna realizó el postest pero no el pretest pero ambos sí completaron el proceso de enseñanza.

La elección de los niveles 1º ESO (12 años) y 4º ESO (16 años) es intencionada, pues representan el inicio y finalización de la etapa de educación secundaria obligatoria, con la intención de observar el nivel de competencia en la formulación y argumentación de conjeturas estocásticas al inicio y finalización de la etapa. Pero, por diversas razones, que van desde razones organizativas del centro hasta la imposibilidad de adaptación en tan poco tiempo disponible del diseño experimental a un alumnado con un pensamiento estocástico poco desarrollado, según los resultados del pretest, no se procedió a la administración del postest al alumnado de 1º ESO por lo que la investigación se ha centrado en el grupo de 4º ESO.

El estudio se ha llevado a cabo en un centro público de la Comunidad Valenciana (España). Se trata de un centro grande (unos 2400 estudiantes de diferentes etapas), centro de referencia y escolarización para el alumnado de los pueblos de la comarca, con una gran diversidad pues en él confluyen hasta 21 culturas diferentes.

El experimento de diseño se lleva a cabo con un grupo natural de 21 estudiantes (seis chicos y 15 chicas) que cursan la materia optativa “Taller de profundización de matemáticas”, de dos horas semanales, a cargo de la firmante de este artículo. La materia está destinada a alumnado con ciertas aptitudes, talento, interés o gusto especial por las matemáticas que desean profundizar y estudiar otros conceptos matemáticos que no forman parte del currículum. Pero, la realidad es que, en este caso, el grupo está formado por un alumnado que está cursando la opción de Matemáticas B (RD 217/2022, de 29 de marzo) y que escoge dicha optativa con el objetivo de reforzar los contenidos dados en la clase de matemáticas, resolver posibles dudas y realizar las tareas encomendadas para obtener buenos resultados en matemáticas; a excepción de dos estudiantes que sí persiguen el objetivo de dicha optativa. En general, son estudiantes con un nivel medio alto en matemáticas que no han tenido experiencias previas en la adquisición y desarrollo de la competencia de formular y argumentar conjeturas, ni tampoco en un modelo de enseñanza como el que se propone en este experimento. Durante el curso en el que se lleva a cabo la investigación el alumnado participante no recibe enseñanza relacionada con el sentido estocástico, aunque, no obstante, algunos de ellos sí recibieron enseñanza de conceptos relacionados con la estadística descriptiva en el curso anterior. El proceso (pretest, enseñanza y postest) se desarrolla durante las sesiones de clase del Taller.

3.4. El diseño de la enseñanza

Para el diseño de la enseñanza se han considerado los siguientes aspectos: 1) Un enfoque sobre conjeturas estocásticas y su formulación y argumentación, expuesto en el marco teórico; 2) Los problemas para la enseñanza: el enunciado del problema para el alumnado; 3) La simulación y los datos y 4) El discurso en el aula. Introducción de conceptos y términos propios del proceso de conjeturar y argumentar sobre la conjetura.

El experimento se basa en la resolución de tres problemas que denominamos PE1, PE2 y PE3. La elección de estos problemas y su desarrollo en el aula surge como consecuencia de los objetivos de investigación, de los resultados del pretest y del análisis previo de estos problemas que permite a los investigadores identificar qué ideas básicas y oportunidades de aprendizaje relacionadas con la competencia formular y argumentar conjeturas estocásticas se van a desarrollar; en particular, como se ha señalado, las que relacionan esta competencia con los usos de las nociones de hipótesis, muestra y muestreo para su aplicación.

La metodología de enseñanza es común a todos los problemas y se basa en el marco metodológico propuesto por Huerta (2018) en el que la profesora adquiere el papel de gestora ilustrada del proceso de formulación y argumentación de conjeturas estocásticas. En la línea propuesta por Ciccolini y Stylianides (2020), durante el desarrollo de las sesiones de enseñanza la profesora deja hablar al alumnado, gestiona los turnos de palabras, promueve la discusión y los debates y observa qué procesos de pensamiento van teniendo lugar. Al mismo tiempo, va fijando el conocimiento a medida que la experiencia avanza y las ideas y conceptos que van surgiendo. La profesora se sitúa como una guía que propone los tres problemas durante las sesiones y va encaminando el proceso con el objetivo que el alumnado transite por el MRPPS (Tabla 1) incidiendo en la necesidad de la formulación de hipótesis y conjeturas y su argumentación. El proceso de enseñanza se lleva a cabo a durante cinco sesiones de 55 minutos, durante la última semana de noviembre y las primeras de diciembre de 2024. Se trabaja en pequeños grupos de cuatro o cinco estudiantes, pero también en grupo-clase, lo que crea la necesidad de comunicar y compartir la formulación y argumentación de conjeturas como un acto social durante este proceso.

3.4.1. Los problemas para la enseñanza

El orden en el que se abordan los problemas no es fortuito, sino que se corresponde con la complejidad estructural del problema que requiere la incorporación gradual de los distintos procesos y objetivos que en ellos se pretende abordar como:

- Los pasos por los que se transita en el MRPPS.
- El vocabulario, conceptos e ideas que en cada uno de ellos se incorporan.
- El contexto y complejidad del problema (de problemas rutinarios a problemas no rutinarios, en el sentido de Polya, 1966).
- La simulación y los datos que produce (Tabla 4).
- Los objetivos transversales a los tres problemas y los particulares de cada uno de ellos.

La Tabla 3 muestra las características y variables de los problemas usados en el proceso de enseñanza.

Tabla 3

Descripción de los problemas para la enseñanza

Problemas para la enseñanza	Pasos MRPPS	Situación	Conjeturar	Objetivos transversales para formular conjeturas estocásticas	Objetivos particulares: argumentar sobre las conjeturas estocásticas	Procesos e ideas estocásticas
PE1: N bolas y 4 colores	1 y 2	Proceso aleatorio compuesto de 100 pruebas con reposición	Resultado de la extracción 101	Basadas en las evidencias (datos) sobre el resultado de las sucesivas extracciones	Argumentar sobre la validez de la conjetura basada en la frecuencia relativa (aquí basada en las extracciones)	Concepto de hipótesis, conjetura. Tipos de conjetura. Argumentar sobre una conjetura
PE2: Datos convencionales y no convencionales	1, 2, 3, 4 y 5	Proceso aleatorio consistente en lanzar diferentes dados	Resultado del lanzamiento o de los dados	En ausencia de evidencias, necesidad de hipótesis teóricas previas para formular conjeturas. La experimentación como medio para obtener evidencias (datos)	Argumentar en base a hipótesis previas cuestionables o no creíbles. Argumentar en base a hipótesis aceptadas como válidas fruto del análisis de datos	Experimentar/simular. Experimentar para generar información y datos. Organizar datos. Análisis de datos y evidencias. Parámetros de estimación (frecuencia relativa, rango, valor medio, media)
PE3: La Cueva (Huerta, 2002)	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8	Proceso aleatorio compuesto de N pruebas	Qué resultado es más probable entre distintos sobre un valor esperado	En procesos estocásticos complejos: formulación de conjeturas plausibles y su validación a través de la obtención de datos	PO y PS. La solución del PS como mejor conjetura para el PO	Simular. La simulación como método de representación, obtención de datos y resolución del problema. Traducción del PO al PS. Resolución del PS. Evidencias para el problema original

3.4.2. La simulación

En la fase de enseñanza el proceso de simular tiene por objetivo obtener información y datos sobre el comportamiento del proceso aleatorio que proporcione al alumnado evidencias suficientes en favor de una determinada conjetura, o en detrimento de ella, formulada con anterioridad. Estas evidencias justifican o rechazan la fiabilidad, credibilidad o probabilidad de ocurrencia de una conjetura por medio de procesos de inferencia estadística informal (en el sentido de Makar y Rubin, 2018), entendidos por estos autores como procesos razonados, pero informales, de crear o comprobar generalizaciones (conjeturas) a partir de datos, es decir, no necesariamente por medio de procedimientos estadísticos estándar (Makar y Rubin, 2009). En este sentido, los problemas se formulan de modo que para su resolución sea necesario simular o experimentar el problema con el fin de obtener datos que proporcionen evidencias sobre la credibilidad, fiabilidad o probabilidad de una determinada conjetura como solución del problema. Esta necesidad crece en relación con la complejidad del problema (Tabla 3).

La simulación en PE3 se diseña y se implementa por la profesora pues no es un objetivo propio de la investigación sino una herramienta. Pero sí, en cambio, la necesidad y uso de los datos que produce, así como la pertinencia e idoneidad de cada generador de azar para producir evidencias sobre una determinada conjetura. Se discute, también, sobre la relación entre el número de simulaciones y las evidencias resultantes para una determinada conjetura. De este modo se introduce la necesidad de la simulación por medios tecnológicos (como Scratch) como forma de afinar aún más las posibles evidencias surgidas de la simulación física, al aumentar, significativamente, el número de simulaciones (ver Minyana y Huerta, 2022).

Tabla 4

La simulación de los problemas para la obtención de datos y evidencias para la formulación de conjeturas

Problema	Simulación	Procesos y datos	Evidencias	Razón suficiente
PE1	No procede	Se muestran en el enunciado del problema	En favor de un color determinado	Frecuencia relativa como estimador de una probabilidad
PE2	Experimentar con el dado proporcionado (convencional y no convencional)	Se lanza el dado: muestreo y muestras. Recogida, organización y análisis de los resultados. Argumentar conjeturas con los datos como evidencia	Se cuestiona la hipótesis de la equiprobabilidad. Los datos surgidos de la experimentación en	Rango y media como estimador del valor esperado. Frecuencia relativa

Problema	Simulación	Procesos y datos	Evidencias	Razón suficiente
PE3	Diseñar la simulación: materiales y reglas. Simulación física y por medios tecnológicos (Scratch)	Identificar variables estadísticas, diseño de tablas de frecuencias, recogida y análisis de los resultados. Argumentar conjeturas con los datos como evidencia. Datos de la simulación	favor de unas caras frente a otras Los datos surgidos de la simulación en favor de unos resultados posibles frente a otros o contrarios	El tamaño de las muestras para la inferencia. Estimadores para la probabilidad y valor esperado

4. RESULTADOS

Los ítems 1 y 2 (Tabla 2), tanto en el pre como en el postest, abordan problemas relacionados con situaciones de juegos de azar. Este tipo de problemas son habituales en la enseñanza y se usan comúnmente como ejemplo para calcular la probabilidad de un suceso, que parece estar dada de antemano, y cuyo argumento principal es la relación $\frac{\text{casos posibles}}{\text{casos totales}}$, haciendo uso del significado clásico de la probabilidad. Es decir, datos no sujetos a incertidumbre para obtener la probabilidad de un suceso aleatorio. La hipótesis de la equiprobabilidad e independencia son tratadas como hechos que cumplen tanto los objetos como el proceso aleatorio, no se cuestionan y, por tanto, no son tratadas como hipótesis. El modelo de enseñanza conlleva, entonces, que las hipótesis acaben siendo consideradas por el alumnado como propiedades intrínsecas a la situación aleatoria con lo que los datos sobre el comportamiento del generador de azar no resultan significantes ni influyentes para determinar una probabilidad.

Los ítems 1 y 2 del pretest identifican este hecho para una moneda en particular que muestra un determinado comportamiento del cual se informa en los enunciados (Figura 1). Los propios ítems incitan a que los participantes se cuestionen la hipótesis de la equiprobabilidad y conjeturen en función de la información que proporciona el enunciado. Se observa que solo cinco participantes son conscientes de que el ítem se refiere a una moneda concreta, así que, intuitivamente, el resto considera que se comporta como una moneda teórica, con la equiprobabilidad y la independencia de las pruebas implícita al ser lanzada múltiples veces, por lo que la información sobre su comportamiento no se toma en consideración y se razona sin tener en cuenta ese dato. A modo de ejemplo, la conjetura que el alumnado formula mayoritariamente es “Me da igual apostar por C o por +, puede salir tanto C como +”. En las

argumentaciones para esta conjetura se observa la consideración de la equiprobabilidad como un hecho universal “Siempre hay la misma probabilidad de que caiga C o +”, o bien se carece de argumentos de carácter estocástico “Depende de la suerte puede salir C o +”. No obstante, existen argumentaciones en las que, pese a un análisis de datos, la consideración de la equiprobabilidad como propiedad (y no como hipótesis) es mucho más fuerte que las propias evidencias “Sí que es verdad que cada cuatro lanzamientos, tres salen cara y una cruz y hay más probabilidades que salga cara (...) pero hay las mismas posibilidades (50/50) de que pueda salir una cosa u la otra”.

En el proceso de enseñanza, PE1 y PE2, se introducen las nociones de hipótesis y conjetura (Huerta, 2020). Además, en PE2 no se parte de la suposición teórica de que un dado sea equiprobable. En este sentido, uno de los propósitos es promover la búsqueda de evidencias con el objetivo de formular conjeturas razonables, es decir, que razonen sobre los datos expuestos o generados; así la posibilidad de considerar o no la hipótesis de la equiprobabilidad dependerá del análisis de datos y la argumentación. La lectura de la información disponible, así como la elaboración de tablas y los métodos de recogida y organización de datos, se abordan en los problemas PE2 y PE3, en los que los datos se recopilan y organizan a partir de la experimentación y la simulación respectivamente.

El postest muestra diferencias respecto al pretest, atribuibles al proceso de enseñanza. El alumnado:

- a) Se fija y lee, al menos, la información disponible en el enunciado.
- b) Confecciona tablas para organizar los datos y otros métodos de organización (subrayado por colores y recuentos) que no elabora en el pretest.
- c) Analiza los datos.
- d) Formula y argumenta sus conjeturas en función de los datos analizados.

“El dos es el que más veces sale, es mi mejor opción porque basándome en los datos que dicen que el dos sale más veces, es más probable que salga”; “Apostaría por el cuatro porque al compararlo con el resto de los números es el que más veces ha salido por lo que tiene más posibilidades”; “La ventaja de ninguno de los números es lo suficientemente grande, con lo que apostaría por un número cualquiera” o “El uno es el más probable porque ha salido menos veces”. En estos ejemplos el alumnado usa los datos como evidencia para formular y argumentar su conjetura, basándose ahora en evidencias de tipo estadístico. En el postest, solo ahora cuatro estudiantes no conjeturan alguno de los dos ítems analizando los datos.

En los ítems 3 y 5 (Tabla 2) del pretest se observa que en contextos de incertidumbre en los que el alumnado posee cierto conocimiento sobre el contexto (como el uso de Instagram en los adolescentes),

este infiere el comportamiento de una persona aleatoria en base a su conocimiento sobre el comportamiento de parte de la población que le es más cercana, incluido el suyo propio. Como consecuencia, predominan las argumentaciones construidas sin basarse en los datos estadísticos proporcionados por los ítems, sino en su conocimiento personal e idiosincrásico sobre la cuestión. Este hecho es compatible con Watson y Moritz (2000), quienes aseguran que el alumnado prefiere usar su conocimiento extraescolar del contexto para hacer conjeturas antes que el conocimiento disponible sobre una determinada muestra para el mismo fin. En efecto, en el pretest la opinión propia, experiencia y conocimiento propio es el que se usó prácticamente la mitad de los estudiantes en las respuestas para formular la conjetura y argumentarla frente a la argumentación basada en los datos, como ejemplo: “Todo el mundo sabe que es Instagram, en estos últimos años los niños han empezado a tener móviles en una edad muy pronto (...) la mayor parte del mundo usa Instagram menos los que sus padres son estrictos y no los dejan, pero en ese caso seguro o en un gran porcentaje lo usa a escondidas” o “Por la experiencia creo que es más probable que use Instagram, aunque las estadísticas muestran lo contrario yo creo que esos niños son de un lugar específico por lo tanto si escogen un niño de fuera del lugar de estudio mis observaciones dicen que si lo usará”. Además, ante los datos de una muestra no reparan en estos y no los usan como información con el fin de elaborar la mejor conjetura, sino que escoger una persona aleatoria se interpreta como una situación de incertidumbre en la que puede suceder cualquiera de las opciones, sin considerar que los datos extraídos de una muestra pueden ser usados para inferir sobre un elemento cualquiera de la población “No importa los resultados de probabilidades que han obtenido esas 1000 personas aleatorias. Hay las mismas posibilidades de que les haya gustado la serie, no les haya gustado o simplemente no la hayan visto aún. Ya que en este caso seguramente ha escogido a 1000 personas aleatorias que a la mayoría les ha gustado la serie, pero a la próxima a lo mejor podría escoger a 1000 personas que o no les haya gustado la serie. Las probabilidades son las mismas y no depende de los resultados anteriores ya que son personas aleatorias”. Se desconsideran las hipótesis que podrían suponerse de los datos de la muestra y se sustituyen por supuestos de carácter personal “Porque quizás hayas elegido unos estudiantes de pueblos lejanos y ellos no tienen ni idea que es, o quizás hayas elegido estudiantes de ciudad que ellos no se alejan del móvil ni un minuto. Por tanto, depende de factores”. El diseño de PE2 y PE3 tiene, por un lado, el objetivo que el alumnado se enfrente a la resolución de problemas en distintas situaciones (Tabla 2) y, por otro, que realice procesos de muestreo aleatorio y obtención de muestras aleatorias con generadores de azar físicos (PE2) y virtuales (PE3). La intención es que identifiquen una muestra (muestras) de datos como una evidencia fiable para la conjetura del

problema (siempre que los datos generados se hayan obtenido por un proceso de muestreo) con el objetivo de formular conjeturas mediante procesos de inferencia informal.

Por un lado, en el posttest, hay un pequeño incremento de las elecciones y argumentaciones basadas en los datos, como ejemplo se muestra cómo razona una alumna en ambos cuestionarios ante cuestiones isomorfas. En el pretest dice: “Pues es la (conjetura) más considerable porque los estudiantes de 14 y 16 años (...) casi siempre usan las redes sociales y entre esas está Instagram que es una de las más populares (...) entonces es muy probable que esa persona que se escoja tenga Instagram”. En el posttest: “Por qué mirando los resultados (del estudio) ya se ve que la mayoría de los jóvenes usan el móvil (...) y seguramente si se le pregunta a un joven aleatorio es mucho más probable que use el móvil a que no lo use”.

Pero, por otro lado, sigue habiendo un elevado porcentaje de alumnado en el posttest que basa sus argumentaciones sin mirar los datos y basa su argumentación en su conocimiento sobre el contexto o pone en duda la validez de los datos de la muestra por ser contradictorios al conocimiento que tiene sobre la cuestión en particular “Actualmente se está experimentado con células madre lo cual provoca que la diabetes se cure” o “Sin basarnos en los resultados, yo, como joven entre los 14 y 16 , sé que esos resultados son falsos porque todos los jóvenes usan el móvil (...)”.

Por ello, se concluye que el contexto puede ser un factor muy influyente a la hora de formular y argumentar conjeturas y que la fuerza de las creencias dificulta la consideración de datos como evidencia fiable para elaborar la conjetura más probable.

Así mismo, los ejemplos dan cuenta de las dificultades que presenta el alumnado en el significado y sentido de uso de la idea de muestra, en particular de su representatividad, muestreo, su relación con la idea de población y su uso en los procesos de inferencia.

En el ítem 4 (Figura 1) se exponen las notas de un alumno en una materia (pretest) y las puntuaciones de un equipo de baloncesto (posttest). Al contrario de lo que cabría esperar, 13 estudiantes no usan los datos para conjeturar sobre la nota del alumno en el próximo examen y las conjeturas formuladas mayoritariamente fueron “Puede obtener una nota tanto alta como baja” o “La nota de su próximo examen no depende de las anteriores”, pese a que el alumno muestra un rango de notas entre 8 y 9.5 puntos. Se puede esperar que la mejor conjetura estocástica sería aquella que se basase en las notas anteriores como evidencias para la conjetura usando, por ejemplo, la media aritmética como un estimador (representante del conjunto de datos) para elaborar la conjetura. El alumnado no repara en esto sino en la incertidumbre que le crea afrontar un examen cada vez, como un suceso independiente de los anteriores, sin memoria,

en la que se modifican las condiciones iniciales que dieron lugar a las notas mostradas. Es decir, en lugar de fijar las condiciones iniciales como hipótesis para la conjetura, se modifican “si no estudia” o “si tienes un mal día” o “si es difícil” y elaboran otra conjetura “puede sacar una nota baja”, lo cual no es incompatible con la primera. Como ejemplo, “Pienso que el estudiante puede obtener una nota tanto buena como mala ya que la nota que saque depende de si ha entendido el tema, ha estudiado, o ha estado prestando atención en las clases”.

Concretamente en la enseñanza de PE3 cada grupo de alumnos simula el problema produciendo diferentes muestras de datos (muestreo-muestra) y proponen la media aritmética como un estimador de la probabilidad del suceso.

En el postest, 11 estudiantes continúan actuando como en el pretest y cinco proponen un rango como estimador para la puntuación del próximo partido. Se interpreta que aquí vuelve a aparecer un obstáculo en dotar de sentido a una muestra de datos relacionada en función del contexto, ya detectada anteriormente.

El ítem 7 informa sobre las distintas frecuencias de aparición de cuatro colores en la extracción (de 100 extracciones) con reposición de una bola contenida en una bolsa. No se dice cuántas bolas hay en total en la bolsa ni tampoco la distribución por colores que hay; con lo que analizar los datos presentes en el enunciado y establecer hipótesis resulta fundamental para formular la mejor conjetura.

Casi la mitad de los estudiantes, nueve de ellos, apuestan por el color de la próxima extracción por sus preferencias o gustos personales por un color, otros confunden los resultados de la extracción con la distribución de bolas en la bolsa o no entienden la reposición y otros pocos sí se percatan de la relación entre la frecuencia relativa de cada color en 100 extracciones con reposición y la distribución de los colores en la bolsa.

Entre estos últimos se observa que, por un lado el alumnado sí es capaz y sí razona sobre dicha relación, establece hipótesis y en base a ellas formula y argumenta su conjetura. En este caso, se han distinguido tres formas de razonamiento estructuradas de forma gradual. En primer lugar un razonamiento de carácter informal “Porque creo que si es el que más ha salido o bien es azar o bien es porque hay más bolas rojas que de las demás, así que apostaría por él basándome en la teoría de que hay más bolas rojas que de los demás colores”. En segundo lugar, se ha identificado un razonamientos en el que el alumnado incorpora más ideas estocásticas suponiendo distintas hipótesis y argumentando sobre ellas “Yo apostaría por el color rojo porque es el color que más ha salido y con bastante diferencia de los otros, así que yo creo que es porque hay más bolas rojas que de cualquier otro color. A lo mejor hay la misma cantidad de todos

los colores y ha sido cuestión de suerte, pero si tuviera que sacar yo la próxima bola elegiría el color rojo porque, aunque puede que tenga las mismas posibilidades que cualquier otro color confiaría más en que salga la roja que es la que más ha salido en las extracciones anteriores”. Y por último, un razonamiento en el que está presente la idea de probabilidad para justificar su mejor conjetura estableciendo la relación $\frac{\text{número de bolas color rojo}}{N}$, siendo N el número de bolas en la bolsa, “Como no sé la cantidad de bolas que hay de cada color, lo más común sería suponer que las proporciones (sic, o tal vez quiso decir probabilidades) son directamente proporcionales a los porcentajes de bolas extraídas (41%) al volverlas a dejar siempre habrá el mismo número de bolas de cada color siendo el rojo el más común con 41% de posibilidades”, suponiendo la equiprobabilidad.

Pero, por otro lado, el hecho de que pocos estudiantes presenten razonamientos como los mostrados indica una dificultad a la hora de analizar y comprender enunciados en contextos de incertidumbre, la interpretación y significado de los datos dados y una cierta dificultad a la hora de establecer hipótesis y formular conjeturas.

En la enseñanza de PE1 se retoma el ítem 7 del pretest, pues la conjetura más probable depende del número de bolas de cada color que hay en la bolsa y para ello resulta fundamental establecer hipótesis (relación hipótesis-conjetura). Además, permite establecer una vinculación entre el concepto de frecuencia relativa y la probabilidad del suceso, argumentando sobre la validez de la conjetura basada en la frecuencia relativa si se considera que esta es una aproximación a la probabilidad del suceso.

Como consecuencia, en el posttest escogen ahora 17 personas el sabor de un caramelo basándose en los datos “Apostaría por los de fresa porque han salido más de ese sabor, entonces es más probable que vuelvan a salir”; aunque la mayoría ha transitado hacia el tipo de razonamiento informal definido anteriormente, siguen persistiendo las dificultades en establecer hipótesis y en relacionar la frecuencia relativa de las extracciones y la distribución de los caramelos en la bolsa.

5. CONCLUSIONES

En este artículo se presenta una investigación en la que, bajo el paradigma de investigación de un experimento de diseño (Cobb y Mc Clain, 2004), se diseña una secuencia de enseñanza basada en el MRPPS (Huerta, 2018), para la introducción y desarrollo de una competencia específica del currículo de matemáticas de la Educación Secundaria Obligatoria (12-16 años) llamada “Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y

la argumentación, para generar nuevo conocimiento” (RD 217/2022, de 29 de marzo), en contextos de incertidumbre. Se distingue entonces entre conjeturas matemáticas (Astawa et al. 2018) y conjeturas estocásticas, objeto de la investigación. Bajo ese paradigma se diseñan dos cuestionarios que se implementan antes y después de la enseñanza para estudiar el efecto de esta.

Antes de la enseñanza, los resultados del pretest proporcionan evidencias de que el proceso de formulación de conjeturas estocásticas es dependiente de la situación de incertidumbre, del contexto y de la información de carácter estocástico disponible para la formulación de la conjetura. Así, en este trabajo, se han identificado tres relaciones que resultan influyentes en dicho proceso: relación hipótesis-conjetura; relación muestreo-conjetura, en particular el origen de los datos, y la descripción de las muestras.

Así, por ejemplo, una enseñanza basada en la idea de que la hipótesis de la equiprobabilidad es una propiedad de los objetos relacionados con los juegos de azar impide la posibilidad de que el alumnado pueda conjeturar sobre la probabilidad de ocurrencia de un suceso (Banting et al., 2018). Pero si se contrasta esta hipótesis con otra basada en algún tipo de información estadística sobre el comportamiento de la situación aleatoria (ítems 1 y 2), entonces se está proponiendo al alumnado que se enfrente a un contraste de hipótesis y decidir, mediante inferencias estadísticas intuitivas (Rossman, 2008) o inferencias estadísticas informales (Makar y Rubin, 2009), bajo cuál de ellas va a formular y argumentar su conjetura. El diseño de los problemas PE1 y PE2 aborda esta relación hipótesis-conjetura.

Los resultados, tanto en el pre como en el postest, en los que se solicita al alumnado que formule su mejor conjetura a partir de los datos de una muestra, indican que estos no tienen la fuerza o credibilidad suficiente como para formular y argumentar conjeturas estocásticas. En su lugar, como señalan Watson y Moritz (2000), prefiere usar el conocimiento extraescolar del contexto para formular y argumentar mediante inferencias estadísticas intuitivas una conjetura estocástica. El diseño de los problemas PE2 y PE3 tiene como fin que el alumnado dote de sentido a los datos de una muestra como evidencia en favor de una determinada conjetura estocástica en conflicto con otras conjeturas basadas en evidencias que no tienen la fuerza o credibilidad de los datos.

En términos generales, la experiencia muestra que el alumnado no está familiarizado con la resolución de problemas como enfoque de enseñanza de las matemáticas. Menos todavía en la introducción y desarrollo de la competencia de formular y argumentar conjeturas estocásticas, como un aspecto relevante del razonamiento estocástico. Incluso, la idea de problema es confusa si se plantea en contextos de incertidumbre como mostró la experiencia. Ante la pregunta de si alguna vez habían abordado este

tipo de problemas la respuesta fue unánime: “no”. Además, el alumnado se cuestiona si realmente son problemas de matemáticas ya que consideran “(...) pues no tiene solución”, “un problema tiene solución fija (por única)”, “a todos debe dar igual (el resultado)” y “esto no es un problema ya que cada uno puede tener su opinión”, es decir, su conjetura sobre una posible respuesta. Por otro lado, entienden que, en estas cuestiones, “falta información”, “no hay solución”, “es un problema con infinitas soluciones” o “son difíciles porque hay que razonar y no hay que usar ningún sistema (de ecuaciones) y no hay operaciones” que proporcionen la respuesta esperada del problema. Vemos que la tradición en la resolución de problemas escolares de matemáticas es un primer obstáculo que incrementa las dificultades que la enseñanza ha de superar en la introducción y desarrollo de la competencia en formular y argumentar conjeturas estocásticas cuando se ve desde el punto de vista de la resolución de problemas. La investigación tiene como objetivo aportar elementos para favorecer el desarrollo del pensamiento estocástico, con relación a la formulación y argumentación de conjeturas estocásticas. Los resultados permiten concluir que, para este fin, se requiere crear en el aula espacios que permitan al alumnado formular y argumentar conjeturas estocásticas, asumiendo hipótesis que doten de sentido a los datos. Para ello, es necesario que el alumnado participe del proceso de resolución de los problemas. En este sentido, el MRPPS, el uso de herramientas físicas y/o tecnológicas para la generación de datos y el papel del docente se muestran como unos instrumentos útiles para la enseñanza, como se ha visto en esta investigación.

Finalmente, parece interesante señalar cómo el grupo de investigación en Didáctica del Análisis Matemático (Sociedad Española Investigación Educación Matemática [SEIEM], 2025) anima a los investigadores a desarrollar investigaciones alrededor de procesos matemáticos como, entre otros, la formulación de conjeturas y su demostración, resaltando su importancia en la transición entre el pensamiento matemático elemental (PME) y el pensamiento matemático avanzado (PMA). Este trabajo, aunque sea de corte exploratorio, hace una lectura en la misma línea y propone que la investigación en educación estocástica desarrolle investigaciones sobre la formulación y argumentación de conjeturas estocásticas reconociendo su importancia en la transición entre el pensamiento estocástico elemental (PEE) y el pensamiento estocástico avanzado (PEA).

Minyana, M. y Huerta, M.P. (2025). La formulación y argumentación de conjeturas en contextos de incertidumbre por estudiantes de secundaria (12-16). Retos para la enseñanza. *Revista de Estadística*, 4, 1-28. <https://doi.org/10.29035/redes.4.1.14>

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Astawa, I.W.P., Budayasa, I.K. y Juniati, D. (2018). The Process of Student Cognition in Constructing Mathematical Conjecture. *Journal on Mathematics Education*, 9(1), 15-26. <https://doi.org/10.22342/jme.9.1.4278.15-26>
- Banting, N., Vashchyshyn, L. y Chernoff, E. J. (2018). In No Uncertain Terms: Encouraging a Critical Stance Toward Probability in School. En A. Kajander, J. Holm y E. Chernoff (Eds.), *Teaching and Learning Secondary School Mathematics, Advances in Mathematics Education* (pp. 571-588). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-92390-1_53
- Batanero, C. y Borovnick, M. (2016). *Statistics and Probability in High School*. Sense Publishers.
- Benson, C.T. y Jones, G.A. (1999). Assessing Students' Thinking in Modeling Probability Contexts. *The Mathematics Educator*, 4(2), 1-21.
- Borovcnik, M. y Kapadia, R. (2018). Reasoning with Risk: Teaching Probability and Risk as Twin Concepts. En C. Batanero y E. Chernoff (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics*. ICME-13 Monographs. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1_1
- Cañadas, M.C., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D. y Yevdokimov, O. (2007). The conjecturing process: perspectives in theory and implication in practice. *Journal of Teaching and Learning*, 5(1), 55-72. <https://doi.org/10.22329/JTL.V5I1.82>
- Chaput, B., Girard, J.C. y Henry, M. (2011). Frequentist approach: Modelling and Simulation in Statistics and Probability Teaching. En C. Batanero, G. Burril y C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics- Challenge for Teaching and Teachers Education: A Joint ICMI / IASE Study* (pp. 85-95). Springer.
- Ciccolini, G. y Stylianides, G.J. (2020). Teaching to listen, question, and ponder: An investigation into promoting an enquiring atmosphere in a mathematics classroom. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 30(SP1), 29-68. <https://doi.org/10.29275/jerm.2020.08.sp.1.29>
- Cobb, P. y McClain, K. (2004). Principles of instructional design for supporting the development of students' statistical reasoning. En D.Ben-Zvi y J.Garfield (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 375-395). Springer.
- De Villiers, M. y Heideman, N. (2014). Conjecturing, Refuting and Proving within the Context of Dynamic Geometry. *Learning and Teaching Mathematics*, 17, 20-26.
- Fatmanissa, N., Yuli Eko Siswono, T., Lukito, A. e Ismail, I. (2024). Utilizing decision-making task: students' mathematical justification in collaborative problem solving. *Avances de investigación en Educación Matemática*, 26, 85-103. <https://doi.org/10.35763/aiem26.5341>
- Fiallo, J. y Gutiérrez, A. (2017). Analysis of the cognitive unity or rupture between conjecture and proof when learning to prove on a grade 10 trigonometry course. *Educational Studies in Mathematics* 92(2), 145-167.
- Gavilán-Izquierdo, J.M. y Fernández-León, A. (2023). Caracterizando cómo conjeturan los investigadores en matemáticas: un estudio de caso. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 24, 21-37. <https://doi.org/10.35763/aiem24.4223>
- Huerta, M.P. (2002). El problema de la cueva. Elementos para un análisis didáctico de los problemas de probabilidad. *Enseñanza de las Ciencias*, 20(1), 75-86. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3980>
- Huerta, M.P. (2018). Preparing Teachers for teaching probability through problem solving. En C. Batanero y E.J. Chernif (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics, ICME-13 Monographs* (pp. 293-311). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1_17

- Minyana, M. y Huerta, M.P. (2025). La formulación y argumentación de conjeturas en contextos de incertidumbre por estudiantes de secundaria (12-16). Retos para la enseñanza. *Revista de Estadística*, 4, 1-28. <https://doi.org/10.29035/redes.4.1.14>
- Huerta, M.P. (2020). Hipótesis y conjeturas en el desarrollo del pensamiento estocástico: retos para su enseñanza y en la formación de profesores. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 23(1), 79-102. <https://doi.org/10.12802/relime.20.2313b>
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations*. Cambridge Academic Press.
- Liu, S. y Ho, F. (2008). Conjecture activities for comprehending statistics terms through speculations on the functions of imaginary spectrometers. *AMT*, 64(3), 17-24.
- Makar, K. y Rubin, A. (2018). Learning about statistical inference. En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 261-294). Springer.
- Martín, R. (4 de julio de 2022). *Las competencias y los sentidos matemáticos en el nuevo currículo*. [Comunicación en congreso]. Escuela de Educación Matemática Miguel de Guzmán, Santander.
- Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022). *Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria*. Ministerio de Educación y Formación Profesional.
- Minyana, M. y Huerta, M.P. (2022). Introducir y desarrollar el sentido estocástico mediante la resolución de problemas. En FESPM (Ed.), *Libro de Actas JAEM 20. Matemáticas para construir el mundo* (pp. 328-352). FESPM.
- Moore, D. S. (1990). Uncertainty. En L.A. Steen (Ed.), *On the Shoulders of Giants: New approaches to Numeracy* (pp. 95-137). National Academy Press.
- Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Tecnos.
- Pratt, D. (2011). Re-connecting probability and reasoning about data in secondary school teaching. En International Statistical Institute (Ed.), *Proceedings of the 58th World Statistical Congress* (pp. 890-899). ISI.
- Rabbani, S. y Herman, T. (2017). Increasing formulate and test conjecture math competence and self confidence in using the discovery learning teaching math. *Journal of Primary Education*, 1(1), 119-128. <https://doi.org/10.22460/pej.v1i1.488>
- Real Academia Española. (s.f). Conjetura. En *Diccionario de la lengua española*. Recuperado en 15 de enero de 2025, de <https://dle.rae.es>
- Rossmann, A. (2008). Reasoning about informal statistical inference: One statistician's view. *Statistic Education Research Journal*, 1(1), 119-128. <https://doi.org/10.52041/serj.v7i2.467>
- Ruiz-Reyes, K. y Contreras, J.M. (2021) Comprensión del muestreo por estudiantes chilenos de educación secundaria. *Statistics Education Research Journal*, 20(2), 11. <https://doi.org/10.52041/serj.v20i2>
- Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (s.f.). *Página principal*. <https://www.seiem.es>
- Shaughnessy, J.M. (1983). The psychology of inference and the teaching of probability and statistics: Two sides of the same coin? En R.W. Sholz (Ed.), *Decision making under uncertainty* (pp. 325-350). Elsevier.
- Viñas, J. M., Burguete, B., López, M. y Santos, C. (2018). Probabilidad e incertidumbre en la sociedad y en los medios. En C. Santos (Ed.), *Física del caos en la predicción meteorológica* (pp. 615-626). Agencia Estatal de Meteorología.
- Watson, J. y Moritz, J. (2000). Developing Concepts of Sampling. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, 44-70. <https://doi.org/10.2307/749819>
- Watson, J. y Smith, C. (2022). Statistics education at a time of global disruption and crises: a growing challenge for the curriculum, classroom and beyond. *Curriculum Perspectives*, 42, 171-179. <https://doi.org/10.1007/s41297-022-00167-7>

Minyana, M. y Huerta, M.P. (2025). La formulación y argumentación de conjeturas en contextos de incertidumbre por estudiantes de secundaria (12-16). Retos para la enseñanza. *Revista de Estadística*, 4, 1-28. <https://doi.org/10.29035/redes.4.1.14>

Zimmermann, G. (2002). *Students' reasoning about probability simulation during instruction*. [Tesis Doctoral, Illinois State University].

Como citar:

Minyana, M. y Huerta, M.P. (2025). La formulación y argumentación de conjeturas en contextos de incertidumbre por estudiantes de secundaria (12-16). Retos para la enseñanza. *Revista de Estadística*, 4, 1-28. <https://doi.org/10.29035/redes.4.1.14>



Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional.