Revista de Educación Estadística
https://revistaeduest.ucm.cl/
Vol. 1, n. 1, 1-22, oct. 2022 - mar. 2023

DOI: https://doi.org/10.29035/redes.1.1.2

MODELIZACIÓN DE LA VARIABILIDAD MUESTRAL EN DIFERENTES METODOLOGÍAS DE LA INFERENCIA

Modelação da variabilidade da amostragem em diferentes abordagens de inferência

Modeling sampling variability in different approaches to inference

Carmen Batanero[1]
Universidad de Granada (Granada, España)
Nuria Begué[2]
Universidad de Zaragoza (Zaragoza, España)
Silvia M. Valenzuela-Ruiz[3]
Universidad de Granada (Granada, España)

Resumen

La inferencia estadística permite extender los resultados obtenidos en el estudio de muestras a las poblaciones de donde dichas muestras han sido recogidas. La enseñanza actual privilegia la metodología frecuencial, basada en la consideración de la distribución muestral del estadístico y en la que se han descrito numerosas dificultades de interpretación de alumnos y profesionales. En la práctica estadística, sin embargo, se utilizan otras modelizaciones, como la bayesiana y el remuestreo y, recientemente, se incorpora en la enseñanza el enfoque denominado inferencia informal. El objetivo de este trabajo es analizar la forma en que la variabilidad muestral se tiene en cuenta en estas diferentes modelizaciones. Utilizando elementos del enfoque ontosemiótico, se muestra que el aprendizaje se concentra en diferentes objetos matemáticos, pero que en todas ellas la modelización tiene un peso importante. También se interpretan como conflictos semióticos algunos errores frecuentes en el aprendizaje de la inferencia. Se finaliza con algunas reflexiones sobre la enseñanza de la inferencia estadística.
Palabras clave: Modelización, Variabilidad muestral, Diferentes metodologías a la inferencia.

Resumo

A inferência estatística permite estender os resultados obtidos no estudo das amostras às populações das quais estas amostras foram recolhidas. O ensino actual favorece a metodologia frequentista, com base na consideração da distribuição da amostragem e na qual numerosas dificuldades de interpretação por estudantes e profissionaistêm sido descritas. Na prática estatística, contudo, são utilizadas outras abordagens de modelação, tais como a modelação Bayesiana e a reamostragem, e recentemente a chamada abordagem de inferência informal foi incorporada no ensino. O objectivodeste documento é analisar como a variabilidade da amostragem étida em conta nestas diferentes metodologias. Utilizando elementos da aproximação ontosemiótica, é mostrado que a

*Autor de correspondencia: batanero@ugr.es (C. Batanero)
[1]https://orcid.org/0000-0002-4189-7139 (batanero@ugr.es).
[2]https://orcid.org/0000-0003-1369-8711 (nbegue@unizar.es).
[3]https://orcid.org/0000-0001-7467-8672 (svalenzuela@ugr.es).

aprendizagem está concentrada em diferentes objetos matemáticos, mas que a modelagem desempenha um papel importante em todos eles. Alguns erros frequentes na aprendizagem da inferência são também interpretados como conflitos semióticos. Acabamos com algumas reflexões sobre o ensino da inferência estatística.
Palavras-chave: Modelação, Variabilidade da amostragem, Diferentes metodologias para inferência.

Abstract:
Statistical inference allows the results obtained in the study of samples to be extended to the populations from which the samples have been collected. Current teaching favours the frequentist methodology, based on the consideration of the sampling distribution of the statistic and in which numerous difficulties of interpretation by students and professionals have been described. In statistical practice, however, other modelling approaches are used, such as Bayesian and resampling inference, and recently the so-called informal inference approach has been introduced into the teaching of statistics. The aim of this paper is to analyze how sampling variability is taken into account in these different approaches. Using elements of the ontosemiotic approach, we show that learning is concentrated on different mathematical objects, but that modelling plays an important role in all of them. Some frequent errors in learning inference are also interpreted as semiotic conflicts. We finish with some reflections on the teaching of statistical inference.

Keywords: Modelling, Sampling variability, Different methodologies of inference.

Recibido: 10/04/2022 - *Aceptado*: 24/08/2022

1. INTRODUCCIÓN

La modelización, su enseñanza y aprendizaje están indisolublemente unidos a los de la matemática, pues, como indican Niss y Blum (2019), esta disciplina nunca puede aislarse por completo del mundo que nos rodea (el dominio extra matemático). Estos autores indican que el conocimiento puramente matemático, incluso aunque sea muy sólido y bien fundamentado, nunca es suficiente para que los estudiantes puedan aplicar lo aprendido de forma efectiva y, por ello, aconsejan incluir este tema en la enseñanza.

Felix Klein abogó por la necesidad de incluir la modelización en la enseñanza de las matemáticas, proponiendo que se utilizase para basar en ella el currículo (Schukajlow et al., 2018). El interés por el tema se ha reforzado por los estudios PISA (Organisation for Economic Cooperation and Development, OECD, 2013) en los que se trata de evaluar la competencia matemática y en resolución de problemas, más que conocimientos descontextualizados. Igualmente, los estándares del Council of Chief State School Officers, CCSSO (2010) sugieren la necesidad de implicar a los estudiantes en los elementos esenciales asociados al aprendizaje de la modelización y de los modelos matemáticos y su papel en la sociedad. Estas sugerencias han tenido un reflejo en la investigación, donde se han llevado a cabo estudios empíricos y desarrollos teóricos, en especial dentro del grupo de modelización y aplicaciones de las matemáticas “The International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications" (https://www.ictma.net/), recopilados, entre otros, en libros como Blum et al. (2007), Niss y Blum (2019) o artículos de survey como Cevikbas et al. (2022) o Schukajlow et al. (2018). Igualmente vienen reflejadas en el reciente currículo español de matemáticas para la Educación Primaria (Ministerio de Educación y Formación Profesional, MEFP, 2022a) y Secundaria Obligatoria (MEFP, 2022b).

El propósito de este trabajo es analizar la modelización de la variabilidad muestral en diferentes metodologías de la inferencia estadística. La enseñanza actual privilegia la inferencia frecuencial, basada en la consideración de la distribución muestral del estadístico y en la que se han descrito numerosas dificultades de interpretación de alumnos y profesionales (Castro-Sotos et al., 2007; Harradine et al., 2011). Sin embargo, algunos autores defienden la idea de reformular la enseñanza introduciendo el método bayesiano (e.g., Lecoutre et al., 2007) o el remuestreo (Watson y Chance, 2012), indicando que son enfoques más intuitivos para los estudiantes.

Además, se encuentra una fuerte corriente hacia la denominada inferencia informal que intenta reducir al mínimo el nivel de razonamiento algebraico y número de conceptos requeridos en el trabajo con inferencia (e.g., Biehler et al., 2017; Cobb, 2007; Makar y Rubin, 2009; 2018; Rossman, 2008; Watson y Chance, 2012; Zieffler et al., 2008). Batanero y Borovcnik (2016) han denominado esta tendencia *aproximaciones informales a la enseñanza de la inferencia*, en el convencimiento de que cualquiera de los enfoques frecuencial, bayesiano y remuestreo puede también trabajarse con diferentes niveles de formalización, como se muestra en algunos de los ejemplos presentados en este libro (ver también Borovcnik, 2019).

Todas estas diferentes formas de abordar la inferencia parten de la necesidad de obtener un conocimiento general, utilizando el análisis de casos particulares (inducción empírica), problema que ha sido estudiado desde la antigüedad y ha sido objeto de debate en filosofía (Cabriá, 1994; de la Fuente y Díaz-Batanero, 2004; Nickerson, 2000; Rivadulla, 1991). Matemáticamente, las soluciones aportadas se basan en las relaciones entre población y muestra, aunque conciben de forma diferentes estas relaciones y utilizan diferentes modelos matemáticos para describirlas. El interés por analizarlas se debe a que el muestreo no sólo es una idea básica en estadística (Heitele, 1975), sino que juega un gran papel en probabilidad, en particular en las leyes de los grandes números y el enfoque frecuencial. Burrill y Biehler (2011) lo consideran como una de las ideas fundamentales en estadística por ser la base de la inferencia y del trabajo con la simulación, cuya utilización en el aula es recomendada para mejorar la comprensión de la probabilidad y la inferencia estadística (Eichler y Vogel, 2014).

Aunque la enseñanza del tema ha estado siempre presente en los currículos españoles de Educación

Secundaria Obligatoria y Bachillerato, el currículo que ha estado vigente hasta este año (MECD, 2015) le proporcionó mayor énfasis, tanto en sí mismo, como por su relación con el estudio del significado frecuencial, en el que la probabilidad se concibe como el límite teórico de la frecuencia relativa en una serie larga de experimentos. Dicho significado permite conectar la estadística y la probabilidad, pues la estimación de una probabilidad se debe realizar a partir de datos empíricos, lo que implica, de hecho, un proceso de muestreo (Batanero, 2003).

Esta presencia del muestreo se ve ahora incrementada en el nuevo currículo, en el que se introducen ideas informales de inferencia como parte del sentido estocástico desde el segundo ciclo de la Educación Primaria (8-9 años) en los siguientes términos (MEFP, 2022a): ”Formulación de conjeturas a partir de los datos recogidos y analizados, dándoles sentido en el contexto de estudio” (p. 103). En el tercer ciclo (10-11 años) se incluye el siguiente contenido: “Identificación de un conjunto de datos como muestra de un conjunto más grande y reflexión sobre la población a la que es posible aplicar las conclusiones de investigaciones estadísticas sencillas” (p. 107).

Esta introducción informal de la inferencia continúa en todos los cursos de la Educación Secundaria Obligatoria (MEFP, 2022b). Más concretamente, para los cursos primero a tercero (12-14 años), se proponen los siguientes saberes básicos:

> − Formulación de preguntas adecuadas que permitan conocer las características de interés de una población. − Datos relevantes para dar respuesta a cuestiones planteadas en investigaciones estadísticas: presentación de la información procedente de una muestra mediante herramientas digitales. − Estrategias de deducción de conclusiones a partir de una muestra, con el fin de emitir juicios y tomar decisiones adecuadas (MEFP, 2022b, p. 41735).

Para el cuarto curso (15 años), se diversifica el contenido dependiendo de la opción elegida A o B, según el tipo de Bachillerato o formación profesional que piense seguir el estudiante. En la opción A se propone:

> Diferentes etapas del diseño de estudios estadísticos. − Estrategias y herramientas de presentación e interpretación de datos relevantes en investigaciones estadísticas mediante herramientas digitales adecuadas. Análisis del alcance de las conclusiones de un estudio estadístico valorando la representatividad de la muestra (MEFP, 2022b, p. 41739-41740).

Mientras que los contenidos sugeridos de inferencia para la opción B son los siguientes:

> Cuarto curso, opción B: Diferentes etapas del diseño de estudios estadísticos. − Estrategias y herramientas de presentación e interpretación de datos relevantes en investigaciones estadísticas mediante herramientas digitales adecuadas. − Análisis del alcance de las conclusiones de un estudio estadístico valorando la representatividad de la muestra (MEFP,

2022b, p. 41744).

Todas las anteriores consideraciones muestran el lugar central que en el nuevo currículo español se da a la idea de muestreo y justifican este trabajo.

2. FUNDAMENTOS

Para apoyar el análisis que se realiza en este artículo se utilizan las ideas de significado y comprensión propuestas en el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemáticas (Godino et al., 2007; 2019). Además, el trabajo se basa en otras sobre modelización en matemáticas y en estadística.

2.1. Significado y comprensión

La cuestión del significado de los objetos matemáticos ha preocupado a muchos investigadores y ha recibido diferentes propuestas de solución (Godino et al., 2021). En este trabajo se asume la conceptualización utilizada en el enfoque ontosemiótico (Godino et al., 2007; 2019) que concibe la situación-problema como aquella que origina la actividad matemática. Al tratar de resolverla o comunicar la solución a otras personas se originan prácticas matemáticas (operativas o discursivas), que pueden ser *practicas personales* si las lleva a cabo una persona o *practicas institucionales* si se producen dentro de una institución, por ejemplo, de investigación o de enseñanza, que comparten problemas y métodos de resolución.

El *significado (personal o institucional)* de un objeto matemático se concibe como el conjunto de prácticas matemáticas personales o institucionales asociadas al campo de problemas relacionado con dicho objeto. En dichas prácticas aparecen diferentes tipos de objetos matemáticos, además de las situaciones-problema: a) el lenguaje matemático (términos, símbolos gráficos, tablas o esquemas utilizados para representar los objetos matemáticos y operar con ellos); b) los conceptos (que son generalizaciones y se delimitan por medio de su definición), c) propiedades que relacionan entre si objetos matemáticos, d) procedimientos, es decir estrategias o algoritmos; y e) argumentos, que permiten justificar las propiedades o soluciones de los problemas o explicarlas a otras personas.

Godino (2002) sugiere que un objetivo central del análisis didáctico-matemático debe ser caracterizar los diversos significados de los objetos y sus interrelaciones, construyendo de esa manera un significado global que sirva de referencia para el análisis de los procesos de instrucción matemática. Paralelamente, la comprensión se concibe como el ajuste entre el significado institucional y personal del objeto matemático y es gradual, pues dicha comprensión se adquiere progresivamente (Godino, 1996). En este trabajo se analizan las prácticas matemáticas, para deducir los objetos matemáticos ligados a la variabilidad muestral en diferentes metodologías de la inferencia, que se interpretan como significados institucionales diferenciados, de acuerdo al enfoque ontosemiótico. El análisis está basado en el estudio de textos de estadística e historia de la estadística, citados a lo largo del artículo, y de trabajos sobre la controversia relacionada con las diferentes metodologías de inferencia (Cabriá, 1994; de la Fuente y Díaz-Batanero, 2004; Lenhard, 2006; Nickerson, 2000; Rivadulla, 1991).

Cuando un resolutor trata de resolver un problema, trabaja con expresiones simbólicas u otras representaciones de los objetos matemáticos, o precisa recordar sus definiciones, propiedades o procedimientos asociados. En cualquiera de estos pasos puede malinterpretar alguno de estos objetos matemáticos atribuyéndoles un significado que no concuerda con el institucional. Se habla entonces de *conflicto semiótico* (Godino, 2002). Al final de esta exposición, se interpretarán algunos de los errores descritos en la comprensión de la inferencia estadística como conflictos semióticos (bien conflictos semióticos cognitivos, producidos en el aprendizaje de los conceptos asociados o conflictos semióticos epistémicos, transmitidos en la enseñanza).

2.2. Modelización en matemáticas

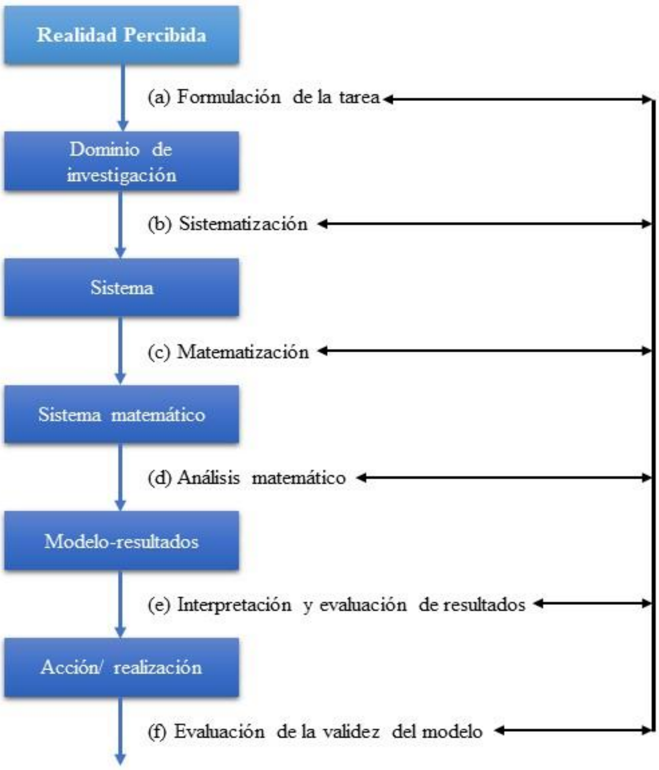
Numerosos autores han descrito las características y pasos esenciales en el proceso de modelización en matemáticas, por medio del cual se simplifica una situación real utilizando aspectos teóricos de la disciplina y datos de la realidad, con la finalidad de analizar las relaciones entre sus componentes y adquirir nuevo conocimiento (Lehrer y Schauble, 2010).

Un esquema sencillo del proceso de modelización es el propuesto por Blomhøj y Jensen (2003, p. 125), que se reproduce, algo adaptado, en la Figura 1. El proceso parte de un problema de la realidad, que podría ser intra matemático, pero que generalmente es extra matemático (realidad percibida), y necesita ser estudiado, para lo cual, es necesario formularlo como una tarea dentro de un dominio de investigación. Seguidamente se simplifica, se fijan las variables a estudiar y se sistematiza para construir un sistema de carácter abstracto. A partir de ahí se formulan uno o varios modelos matemáticos, con lo cual se llega a un sistema matemático, que se analiza mediante diferentes herramientas para mejorar o refinar el modelo y producir unos resultados. Estos resultados deben ser interpretados en función de la realidad de partida, lo que supone la evaluación del modelo, bien para tomar ciertas acciones o decisiones para reformularlo o para obtener una mejor comprensión del problema inicial. La fase final es la validación, donde se valora si los resultados obtenidos se ajustan a la realidad y son útiles para describirla. En este paso final, en ocasiones, surgen nuevos problemas que inducen nuevos ciclos de modelización. En consecuencia, los problemas son abiertos, al tener más de una solución; ello implica la creatividad del resolutor al trabajar con estos problemas (Lu y Kaiser, 2022).

En definitiva, un proceso matemático de modelización no consiste únicamente en el trabajo con los modelos matemáticos dados por otra persona o construidos por el resolutor. La fase inicial de observación y simplificación de la realidad, para elegir el modelo, y la final de interpretación de la bondad de dicho modelo para resolver el problema surgido de la realidad son igualmente importantes y, por ello, la enseñanza del proceso completo de modelización debe entrar en el aula de matemáticas. Como sugieren Doerr, Ärlebäck y Misfeldt (2017), los conceptos, conocimientos y habilidades matemáticas se deben orientar a involucrar al estudiante en los procesos de formular un modelo, emplear las habilidades matemáticas para obtener resultados del mismo, interpretar estos resultados en el contexto del problema y evaluar la validez de la solución.

Figura 1

Pasos en el trabajo de modelización.



El currículo español recientemente promulgado para la Educación Secundaria Obligatoria (MEFP, 2022) sugiere que la resolución de problemas sea no sólo un contenido, sino un vehículo para el aprendizaje de las matemáticas, conectándolas con la ciencia y tecnología (Science, Technology, Engineering and Mathematics, STEM). Para ello se propone que el alumno interprete, modelice y resuelva problemas de la vida cotidiana y de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias. El currículo citado hace referencia a la modelización en relación a cada uno de los sentidos, incluido al sentido estocástico. También se hace referencia a la modelización en los criterios de evaluación; por ejemplo, en relación al sentido algebraico se indica “Modelización y resolución de problemas de la vida cotidiana, mediante representaciones matemáticas y lenguaje algebraico, haciendo uso de distintos tipos de funciones” (p. 41738).

2.3. Modelización en probabilidad y estadística

La educación estadística no ha sido indiferente a la corriente que resalta la importancia del aprendizaje de la modelización, y su papel ha sido destacado por diferentes autores. Uno de los primeros fue Henry (1997), quién considera que “un modelo es una interpretación abstracta, simplificada e idealizada de un objeto del mundo real, de un sistema de relaciones o de un proceso evolutivo que surge de una descripción de la realidad" (pg. 78). Jones y Thornton (2005), por su parte, indican que esta aproximación a la modelización en probabilidad ayuda a diferenciar las situaciones aleatorias en la realidad de su interpretación teórica.

Batanero (2003) analizó el concepto de aleatoriedad como modelo matemático y el papel de la simulación como instrumento de modelización en probabilidad, indicando que mediante la simulación se ponen en correspondencia dos experimentos aleatorios diferentes (real y simulado), trabajando con el simulado para obtener conclusiones válidas sobre el experimento real. Chaput et al. (2011), por su parte sugieren que al trabajar mediante simulación se está ya modelizando, porque se debe simplificar la realidad y fijar los aspectos de la misma que queremos simular, así como especificar unas hipótesis matemáticas sobre el fenómeno estudiado. Estos autores indican que la perspectiva de modelización en la enseñanza de la probabilidad permite realizar una síntesis entre las metodologías clásica, frecuencial y subjetiva de la probabilidad. Igualmente, Pfannkuch y Ziedins (2014) recopilan una serie de estudios que defienden la modelización en la enseñanza de la probabilidad y proponen un marco de referencia para desarrollar en los estudiantes esta perspectiva, que consta de dos partes conectadas: una basada en la teoría y otra en los datos. Además, sugieren como conceptos fundamentales en la construcción de modelos probabilísticos los de aleatoriedad, independencia y distribución, todos los cuales intervienen en el estudio de la inferencia estadística. Estas ideas fueron objeto de un monográfico en la revista ZDM (Pfannkuch et al., 2018) en que diversos autores describen experiencias en las que exploran cómo estudiantes de varias edades construyen conceptos estocásticos mediante procesos de enseñanza basados en la simulación.

La importancia del enfoque de modelización en el estudio de la inferencia informal fue resaltada en el número monográfico en la revista *Statistics Education Research Journal* (Biehler et al., 2017).

Los autores apuntan a las posibilidades del software didáctico para simular y generar datos y proporcionar un puente entre la estadística y probabilidad, necesario para la modelización en la aproximación informal a la inferencia. En este trabajo ampliamos estas ideas, considerando que este es un enfoque posible entre otros muchos de la inferencia, cada uno de los cuales implica el estudio y comprensión de diferentes objetos matemáticos y, por tanto, en términos del enfoque ontosemiótico, implican diferentes significados de la inferencia. Por limitación de espacio nos restringimos a las ideas iniciales de población, muestra, estadístico y parámetro y la forma en que se modeliza la variabilidad muestral en cada una de estas metodologías. En trabajos previos hemos analizado las diferencias entre varias metodologías de la inferencia en el contraste de hipótesis (Batanero et al., 2017) e intervalo de confianza (Batanero et al., 2020).

2.4. Inferencia estadística como modelo de generalización en las ciencias empíricas

En las ciencias empíricas los nuevos desarrollos teóricos o aplicados se obtienen a partir del análisis de casos particulares (es decir, mediante inducción empírica), pues no es posible aplicar métodos deductivos en estas ciencias (Hacking, 2006). El problema general planteado en una situación de inferencia consiste en obtener un nuevo conocimiento, generalizable a una población completa, mediante el análisis de muestras adecuadamente tomadas de dicha población. El estudio de dicho problema llevó al desarrollo de la inferencia estadística y ha recibido diferentes soluciones (Cabriá, 1994; de la Fuente y Díaz-Batanero, 2004).

Expresado en forma simple, el problema de la inferencia consiste en describir la distribución teórica de probabilidad de una variable aleatoria ξ en una población. Generalmente, la distribución de esta variable viene modelizada por una familia conocida de distribuciones que depende de algún parámetro o característica estadística en dicha población. Un ejemplo muy utilizado para describir variables biológicas, psicológicas, económicas, etc. es la distribución normal $N(\mu, \sigma)$, que depende de dos parámetros, su media μ y su desviación típica σ; la situación más típica es querer estimar el valor de la media μ (Batanero y Borovcnik, 2016).

Generalmente, no es factible realizar un estudio completo de la variable ξ en la población completa y se utiliza una muestra aleatoria de la misma de tamaño n, a partir de la cual se utiliza su media $\bar{x}$ para estimar el valor desconocido de μ. La incertidumbre asociada a dicha estimación se debe a que es posible obtener diferentes muestras de la misma población y, en principio, el valor las medias muestrales en cada una de ellas podría ser diferente. Esto es lo que se conoce como *variabilidad muestral* y da origen a un nuevo problema: ¿cómo tener en cuenta la variabilidad muestral para poder dar estimaciones lo más precisas posibles del parámetro en la población? En lo que sigue describimos las diferentes formas en que en inferencia estadística se puede modelizar esta variabilidad muestral, como primer paso para resolver el problema de inferencia. Puesto que estas diferentes metodologías se basan en diferentes objetos y prácticas matemáticas, constituyen significados institucionales diferenciados de la inferencia, desde nuestro marco teórico (Godino et al., 2007; 2019).

3. DIFERENTES MODELIZACIONES DE LA VARIABILIDAD MUESTRAL EN INFERENCIA

3.1. Metodología frecuencial

La enseñanza actual de la inferencia privilegia la metodología frecuencial, donde, además de la distribución de probabilidad de la variable en la población, se tienen en cuenta otros dos tipos diferentes de distribución (Harradine et al., 2011):

- *La distribución de datos en la muestra bajo estudio*. Si la muestra ha sido elegida en forma aleatoria (lo que supone que cada elemento de la muestra es independiente de los demás) y tiene suficiente tamaño, se calcula un estadístico (que varía de muestra a muestra) para estimar el valor del parámetro, que es constante, pero desconocido. En el caso de querer estimar la media μ de la población utilizaríamos la media de la muestra $\bar{x}$, por ser un estimador insesgado, consistente y de mínima varianza de la media en la población.
- El estadístico recogido varía de una muestra a otra y se considera como una variable aleatoria. La distribución de probabilidad de todos los valores que puede tomar el estadístico en el conjunto de las posibles muestras de la población de un tamaño dado se conoce como *distribución muestral*. En el ejemplo dado, como la distribución de la población es normal, si se conoce el valor de la desviación típica de la población σ, la media de la muestra $\bar{x}$ sigue también una distribución normal, cuya media coincide con la de la población, pero cuya desviación típica es igual a la de la población dividida por la raíz cuadrada del tamaño de la muestra, esto es $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, siendo n el tamaño de la muestra. El mismo resultado se alcanza, aunque no sea la población de partida normal, si la muestra tiene suficiente tamaño para aplicar el Teorema Central del Límite.
- Cuando no se conoce el valor de la desviación típica, entonces la variable $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ sigue una distribución T de Student con n-1 grados de libertad, siendo S^2 la cuasi varianza muestral, es decir, $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$. Se utiliza esta distribución para estimar μ. Además, como la distribución T tiende a la normal al crecer los grados de libertad, si el tamaño de la muestra es

grande, se puede utilizar la distribución normal, en vez de la T.

Como se ha indicado, en la inferencia frecuencial el valor del parámetro (μ en el ejemplo) se considera constante, pero desconocido. La variabilidad muestral se modeliza, en consecuencia, en este enfoque mediante el concepto de distribución muestral. En cada caso particular (parámetro que se quiere estimar y datos conocidos) será necesario determinar dicha distribución muestral y una vez obtenida, se puede utilizar para obtener intervalos de confianza o llevar a cabo contrastes de hipótesis sobre el parámetro en la población.

La inferencia frecuencial es, entre las diferentes metodologías de la inferencia, la que ha recibido más atención desde el punto de vista de su comprensión por los estudiantes y en la que se han descrito numerosas dificultades (ver, por ejemplo, Castro-Soto et al., 2007; de la Fuente y Díaz-Batanero, 2004 o Harradine et al., 2011). Ello se debe a la cantidad de conceptos y propiedades que deben manejarse y diferenciarse para poder aplicarla correctamente. Otra explicación es que la lógica de la metodología frecuencial es opuesta a la seguida en el proceso de enseñanza del tema (Kula y Koçer, 2020). En la enseñanza se comienza desde la comprensión de qué es una población en estudio y cuáles son sus parámetros. Se continúa con la idea de muestreo repetido a través del cual se pide a los estudiantes imaginar (modelizar) todos los valores de un estadístico para formar (de forma imaginada) la distribución muestral que se utiliza para estimar el parámetro. Pero, posteriormente, cuando se pide a los estudiantes aplicar lo aprendido, se toma una única muestra y, aceptando algunas hipótesis sobre la distribución muestral, se llega a la estimación.

Por otro lado, Saldanha y Thompson (2002) sugieren que la mayor parte de los estudiantes, incluso los más avanzados piensan que la muestra es una versión casi proporcional a escala pequeña de la población estudiada y esto interfiere con su comprensión de la distribución muestral, donde hay que pensar en que las muestras difieren una de otras. Esta falta de comprensión de la distribución muestral va a influir en sus dificultades posteriores con la inferencia (Lipson, 2003).

3.2. Metodología bayesiana

Mientras que la inferencia frecuencial se apoya en el significado frecuencial de la probabilidad, muchos estadísticos prefieren seguir el significado subjetivo, en que la probabilidad está siempre condicionada al conocimiento de la persona que la asigna (Batanero y Borovcnik, 2016). Se asume la probabilidad como un grado personal de creencia, comprendido entre 0 y 1 y puede ser diferente para distintas personas (Gigerenzer, 1993). Con este supuesto surge la inferencia bayesiana, que fue introducida inicialmente entre 1764 y 1786 por Bayes y Laplace, quienes resolvieron independientemente el problema de la probabilidad inversa (obtención de la distribución a posteriori de un parámetro a partir de datos de una muestra y de la distribución de probabilidad a priori del parámetro), que es la esencia de la metodología bayesiana (Hald, 2008).

En esta metodología el parámetro que se trata de estimar en la población (μ en el ejemplo) no se considera constante, sino una variable aleatoria que considera cada uno de los valores posibles que puede tomar el parámetro (Gigerenzer, 1993; Lecoutre et al., 2007), para el cual se diferencian dos distribuciones de probabilidad diferentes:

- *Distribución a priori*, que representa el grado de creencia inicial que tiene un investigador en los diferentes valores del parámetro antes de recoger los datos de la población. Si no se tiene ninguna creencia previa, se suele usar la distribución uniforme, esto es, suponer la equiprobabilidad de todos los valores del parámetro.
- *Distribución a posteriori* o grado de creencia en cada uno de los valores del parámetro, una vez que se han recogido los datos. Esta distribución a posteriori se calcula combinando la distribución a priori con los datos por medio del teorema de Bayes.

Sea $P(\theta)$ la función de densidad a priori del parámetro θ que se desea estimar y $P(y|\theta)$ la verosimilitud o probabilidad de haber obtenido los datos y con cada valor supuesto del parámetro θ. Entonces la distribución a posteriori se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$P(\theta|y) = \mathrm{K} \cdot P(\theta) \cdot P(y|\theta)$$

Es decir, la distribución a posteriori es proporcional al producto de la distribución a priori por la verosimilitud, ya que K= $\int P(\theta) \cdot P(y|\theta) d\,\theta$ es una constante normalizadora y la integral se extiende a todos los valores posibles del parámetro; por tanto, la distribución a posteriori se obtiene aplicando el Teorema de Bayes para combinar los datos y la verosimilitud (Bolstad, 2013).

En consecuencia, en inferencia bayesiana no se contemplan diferentes muestras de la población, sino una única muestra de la misma, pero si se conciben diferentes valores posibles del parámetro, con sus distribuciones a priori y a posteriori. El principal objetivo de la inferencia bayesiana es actualizar la distribución del parámetro, es decir, pasar de la distribución a priori a la distribución a posteriori. Se puede aplicar sucesivamente, de forma que diferentes muestras nos mejoran el conocimiento del parámetro.

Respecto a las dificultades de aprendizaje, Díaz-Batanero (2007) realizó una experiencia de enseñanza sistemática de este enfoque y evalúa el aprendizaje de los estudiantes, que fue, en general satisfactorio, describiendo los siguientes problemas: dificultades relacionadas con el uso de la probabilidad condicional, confusión de estadístico y parámetro, manejo de desigualdades y olvido de fórmulas, que son comunes a la inferencia frecuencial.

3.3. Remuestreo

Algunas técnicas estadísticas están basadas completamente en el uso intensivo del ordenador y la simulación, por lo que requieren pocos supuestos respecto a la distribución de la variable en la población. En este sentido, tienen una aplicación más amplia que los métodos tradicionales y son útiles cuando no se conoce el modelo que sigue la distribución de la población.

El remuestreo comprende una variedad de métodos que implementan procesos de simulación por ordenador para estimar empíricamente la probabilidad, a partir de la frecuencia relativa obtenida en muestreos repetidos de los propios datos. Estas técnicas fueron conceptualizadas por Efron (1979) y Efron y Tibshirani (1993), aunque algunas ideas básicas relacionadas con este método se encuentran en trabajos de autores previos (Hall, 2003). Su nombre se debe al hecho de utilizar muchas muestras repetidas tomadas de los mismos datos (la muestra original). La filosofía de estos enfoques es que toda la información que se necesita sobre la población se puede obtener de dicha muestra, si ésta está bien seleccionada (Batanero y Borovcnik, 2016). Por tanto, una diferencia con las metodologías frecuencial y bayesiana es que aquellas se basan en modelos teóricos desarrollados analíticamente.

En esencia, el método permite aproximar la distribución muestral de un estadístico mediante un procedimiento muy simple: tomar un gran número de muestras con reemplazamiento de la muestra original (Bootstrap) o construir todas las posibles permutaciones de la muestra original (re aleatorización, que usa el muestreo sin reemplazamiento) (Ledesma, 2008). En cada una de las nuevas muestras se calcula el estadístico de interés y de este modo se obtiene una *distribución muestral de remuestreo* que puede utilizarse para realizar contrastes de hipótesis o construir intervalos de confianza. Esta nueva distribución se aproxima a la distribución muestral teórica e incluso a la *distribución muestral empírica* obtenida mediante simulación de una distribución teórica, pero conceptualmente es diferente e introduce un nuevo error en el proceso que se une a los errores tipo I y tipo II; este error se deduce del hecho de usar una aproximación a la distribución muestral y no la distribución muestral teórica (Borovcnik, 2019).

El único supuesto en el que se basa el remuestreo es la calidad de la muestra extraída inicialmente, puesto que muestras no extraídas con procedimientos que aseguren la representatividad o muestras excesivamente pequeñas pueden dar lugar a estimaciones sesgadas, algo que también sucede en las técnicas frecuencial y bayesiana. La descripción de estos métodos no precisaría muchos conceptos, sino simplemente la enseñanza de la simulación, hoy día muy disponible en cualquier centro educativo. Autores como Cobb (2007) apostaron por la simplicidad de este enfoque, e incluso proponen reemplazar la estadística inferencial tradicional por el remuestreo.

En consecuencia, en el método de remuestreo sólo se considera una muestra de la población, pero a partir de ésta se generan una multiplicidad de muestras, cuyos estadísticos dan origen a la distribución de remuestreo, que es conceptualmente diferente a la distribución muestral utilizada en inferencia frecuencial, pero puede aproximar bien a esta, dependiendo de la calidad de la muestra inicialmente tomada.

Aunque son ya muchos los trabajos basados en la enseñanza de técnicas de remuestreo, en particular con aproximaciones informales a la enseñanza de la inferencia que se describen en la siguiente sección, pocas investigaciones han descrito las dificultades asociadas. Case y Jacobbe (2018) realizan una síntesis de las mismas, citando entre otras, la dificultad para identificar la unidad de observación en la distribución de remuestreo y confundir simulación y replicación. También indican que se repiten errores de comprensión del concepto de hipótesis nula descritos en inferencia frecuencial y su papel en el proceso de simulación.

3.4. Aproximaciones informales a la enseñanza de la inferencia

En los últimos años aparecen muchas propuestas para simplificar la enseñanza de la inferencia, agrupadas en lo que se ha denominado como inferencia informal (e.g., Biehler et al., 2017; Cobb, 2007; Makar y Rubin, 2009, 2018; Rossman, 2008; Watson y Chance, 2012; Zieffler et al., 2008). El significado dado a este término es muy amplio y abarca desde experiencias que no van más allá del análisis exploratorio de datos a versiones simplificadas de los métodos estadísticos descritos anteriormente. En general, trata de obtener generalizaciones a partir de los datos, sin procedimientos algebraicos formales y reduciendo el número de conceptos requeridos, pero teniendo en cuenta la incertidumbre (Makar y Rubin, 2009).

Reconociendo la diversidad de formas de entender la inferencia estadística informal, Makar y Rubin (2018) indican que comparten los siguientes supuestos: a) Deseo de generalizar más allá de los datos que se han recogido; b) incorporar la incertidumbre en los resultados del proceso inferencial; c) usar los datos como evidencia; d) predominancia de los resúmenes estadísticos, como la media sobre los datos aislados y e) integración del contexto en la conclusión. Doer, Delmas y Makar (2017), por su parte, indican que la inferencia informal pone el foco en el proceso de inferencia estadística más que en el producto del mismo y permite desarrollar el razonamiento estadístico del estudiante. Todas estas características son compartidas con todos los enfoques discutidos de la inferencia en las secciones anteriores, por lo que la definición de "inferencia informal" es bastante amplia y difusa. Un punto diferencial es que las sugerencias de enseñanza de inferencia informal se basan en la visualización y la simulación intensiva con ordenador, utilizando en lo posible software amigable. Por este motivo algunos autores (e.g., Watson y Chance, 2012) sugieren que es posible iniciar ideas informales de inferencia utilizando el remuestreo desde la educación secundaria.

Nosotros consideraremos que es posible enseñar inferencia con diferentes grados de formalización en cualquiera de las metodologías descritas; algunos ejemplos de enseñanza informal de estos métodos se han presentado en Batanero y Borovcnick (2016). Coincidimos con Borovcnik (2019) en que este tipo de inferencia informal, donde los modelos estadísticos subyacentes todavía son el foco, pero se visualizan y simplifican para presentarlos a los estudiantes podría ser un paso intermedio para la enseñanza formal posterior en los cursos universitarios.

3.5. Las diferentes metodologías de inferencia como significados diferenciados de la misma

La exposición realizada en los apartados anteriores lleva a concluir que los objetos matemáticos que surgen de las prácticas realizadas en las metodologías analizadas para describir y modelizar la variabilidad muestral son diferentes y por tanto en el enfoque ontosemiótico (Godino et al., 2007; 2019) las metodologías descritas podrían considerarse diferentes significados de la inferencia. Restringiendo el contenido a la variabilidad muestral, se pueden describir significados diferenciados para la misma, pues aplican objetos matemáticos característicos en cada una de las metodologías, donde no solo cambia el problema inicial que la motiva, sino también los conceptos, propiedades y procedimientos. En la Tabla 1 se listan algunos de estos objetos, que se han deducido del análisis de los libros de estadística e historia de la estadística, así como de artículos sobre la controversia en inferencia citados a lo largo del trabajo.

Por supuesto, dado que la exposición realizada es muy elemental, los objetos representados en la Tabla 1 son solo algunos de los característicos de cada enfoque, pero alertan a los investigadores y profesores cuando deben decidir qué enfoque será mejor para sus estudiantes, pues optar por uno u otro implica la enseñanza de unas matemáticas diferentes. No obstante, en cualquiera de las metodologías está presente la actividad de modelización y la construcción de modelos (simulada en la inferencia informal y remuestreo o elección y trabajo con modelos en la metodología frecuencial y bayesiana).

Tabla 1

Algunos objetos matemáticos ligados a los diferentes significados de la variabilidad muestral

Significados	Problema	Conceptos/Propiedades	Procedimientos
Inferencia frecuencial	Describir la variabilidad del estadístico en muestras repetidas de la población	El parámetro es una constante desconocida Interpretación frecuencial de la probabilidad El estadístico es una variable aleatoria	Se toma una sola muestra Procedimientos analíticos, tipificación. Uso de modelos de distribuciones

Significados	Problema	Conceptos/Propiedades	Procedimientos
		Variabilidad de muestras de la población Distribución muestral Teorema Central del Límite	
Inferencia Bayesiana	Actualizar la distribución del parámetro.	El parámetro es una variable aleatoria. Interpretación subjetiva de la probabilidad. Distribución a priori y a posteriori. Distribuciones conjugadas.	Asignar la distribución a priori. Teorema de Bayes. Obtener la distribución a posteriori. Modelos de distribuciones a priori y posteriori.
Remuestreo	Describir la variabilidad de permutaciones o subconjuntos de la misma muestra	El parámetro es un valor constante. Interpretación frecuencial de la probabilidad. Variabilidad del estadístico en submuestras o permutaciones de la muestra inicial. Distribución de remuestreo.	Construir un modelo simulado. Obtener variantes o subconjuntos de la muestra inicial Construir la distribución del estadístico en el remuestreo.
Aproximaciones informales a la enseñanza	Describir la variabilidad de muestras de resultados repetidos de un modelo	Interpretación frecuencial de la probabilidad. El valor supuesto del parámetro determina el modelo. El estadístico varía en las muestras Distribución muestral empírica.	Obtención de muestras a partir de un modelo simulado Obtención de la distribución muestral empírica por simulación bajo el modelo supuesto.

3.6. Algunos conflictos semióticos

En la exposición, se han descrito errores e interpretaciones incorrectas en cada enfoque de la inferencia, a los que hay que añadir otros específicos del contraste de hipótesis (Batanero et al., 2017) e intervalo de confianza (Batanero et al., 2020). A continuación, destacamos conflictos semióticos (Godino, 2002) relacionados con la variabilidad muestral (disparidad entre el significado institucional del objeto matemático y su interpretación, bien institucional o personal), algunos de los cuales se transmiten en los libros de texto o en los artículos de investigación (Batanero et al., 2017):

- *Confusión entre frecuencia relativa y probabilidad.* Es frecuente encontrar las expresiones *probabilidad empírica* para referirse a la estimación frecuencial de la probabilidad a partir de la frecuencia relativa. Este conflicto ya fue denunciado por Chaput et al. (2011), quienes advierten del peligro de confundir la frecuencia relativa, que varía de muestra a muestra y se obtiene de los experimentos con la probabilidad que tiene un carácter teórico, y, por tanto, es constante. En el mismo sentido, es incorrecto referirse como *probabilidad teórica* únicamente al significado clásico, pues toda probabilidad es teórica; lo empírico sería su estimación por medio de la frecuencia.

- *Confundir estadístico y parámetro*, o no diferenciarlos claramente en las aplicaciones; o bien intercambiar sus propiedades, considerando el parámetro variable y el estadístico constante (en la inferencia frecuencial).
- *Confundir las diferentes distribuciones que aparecen en la inferencia frecuencial* (Harradine et al., 2011). En ocasiones, no se diferencia entre la distribución estadística de los datos en la muestra y la distribución de probabilidad en la población (detrás de las cuales hay dos objetos matemáticos diferenciados, variable estadística y variable aleatoria). Otras, se confunde la distribución de la población con la distribución muestral.
- *Confusión entre la distribución muestral teórica y empírica en la aproximación informal:* Es importante que el profesor comprenda los límites y no sólo las posibilidades de la simulación. La simulación introduce un error de estimación añadido a los errores tradicionales en la estimación por intervalos (precisión) o contraste de hipótesis (errores tipo I y II) (Borovcnik, 2019). Sólo se puede controlar este error, a medida que aumenta considerablemente el número de simulaciones, pues la distribución muestral empírica, obtenida mediante simulación, converge a la teórica cuando el número de muestras tomadas tiende a infinito. Sin embargo, para un número finito de simulaciones, las distribuciones muestrales empíricas varían de una simulación a otra. En consecuencia, las distribuciones muestrales obtenidas por cada alumno pueden ser diferentes, lo que puede añadir complejidad a la clase. Una forma de solventar este problema sería que el profesor acumule los resultados de todas las simulaciones para que la clase trabaje con una única distribución muestral más precisa.
- Un conflicto aún mayor, denunciado por Gigerenzer (1993) es la *mezcla de elementos de las metodologías frecuencial y bayesiana* en la práctica estadística y la enseñanza formal del tema. Dichas metodologías tienen diferentes fines y son apropiadas en distintas situaciones que el profesor debe hacer ver a sus estudiantes, para promover un uso razonable de la inferencia estadística.

4. CONCLUSIONES

Una primera conclusión de la discusión realizada a lo largo del artículo es la diversidad de modelos matemáticos que permiten resolver el problema de la inferencia o darles una solución aproximada. Por otro lado, ninguna aproximación elimina completamente las dificultades de aprendizaje, pues la lógica de la inferencia, ya sea introducida mediante desarrollo teórico frecuencial o bayesiano o mediante simulación (remuestreo) siempre requiere la comprensión de las ideas de variabilidad, distribución y muestreo (Case y Jacobbe, 2018).

Otra observación es que el estudio de la inferencia puede llevarse a cabo desde el punto de vista de la modelización, en cualquiera de las metodologías que se elija, siguiendo actuales recomendaciones, que sugieren la necesidad de que los estudiantes aprendan matemáticas a través de la modelización (Niss y Blum, 2019). La inferencia es un contenido en que es posible mostrar al estudiante que cada problema puede tener más de una solución fomentando su creatividad (Lu y Kaiser, 2022). Ello requerirá que la enseñanza de la inferencia se lleve a cabo utilizando problemas y contextos variados que lleven a los alumnos a la actividad de modelización y que se resalten los diferentes pasos del proceso de modelización representados en la Figura 1 (Blomhøj y Jensen, 2003).

En el aula de matemáticas con frecuencia los estudiantes trabajan con modelos matemáticos que se les dan construidos o bien se les dan problemas tipo tomados de libros de texto, que no incluyen datos de la realidad y son simplificaciones de los problemas reales de inferencia. Pero las habilidades de modelización son difíciles de adquirir si no se ejercitan adecuadamente (Lu y Kaiser, 2022), lo que también se aplica a la modelización en probabilidad y estadística (Chaput et al., 2011). Sería importante dedicar más tiempo a las fases iniciales y finales del proceso de modelización, es decir, la observación y sistematización de la realidad y la interpretación de los resultados.

Hay que considerar también dos dificultades de la enseñanza con este enfoque; implementar una secuencia de contenidos coherente y acorde al currículo y conseguir que el estudiante pueda aplicar lo aprendido en nuevas situaciones (Doerr, Ärlebäck y Misfeldt, 2017). Para ello, hay que preparar a los profesores tanto matemáticamente como didácticamente y motivarlos para esta tarea, usando ejemplos centrados en la modelización en su propia formación.

Reconociendo el interés de emplear aproximaciones informales en la enseñanza inicial de la inferencia, es importante no sustituir todo el razonamiento probabilístico propio de la inferencia por la tecnología, olvidando enfatizar en los procesos aleatorios involucrados en la simulación. Con ello no se llegaría a una enseñanza de la inferencia estadística, pues esta debe estar justificada por un modelo de probabilidad que ligue los datos a la población (Rossman, 2008). Tampoco se debe sustituir el aprendizaje de los conceptos básicos de inferencia por el aprendizaje de la construcción de modelos de simulación en un software específico. Esto añade un tiempo innecesario al aprendizaje, pues, salvo problemas muy triviales, construidos específicamente para la enseñanza, la construcción de dichos modelos no es tan simple. Si el estudiante construye un simulador inadecuado, la distribución muestral empírica obtenida no sería válida para resolver el problema de inferencia planteado. Es importante igualmente que el profesor esté atento a los diferentes conflictos semióticos (Godino, 2002) señalados en este trabajo.

Agradecimientos

Proyecto PID2019105601GBI00/AEI/10.13039/501100011033 y Grupo de Investigación FQM126 (Junta de Andalucía).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Batanero, C. (2003). La simulación como instrumento de modelización en probabilidad. *Educación y Pedagogía, 15*(35), 3754.

Batanero, C. y Borovcnick, M. (2016). *Statistics and probability in high school.* Sense Publishers.

Batanero, C., Díaz-Batanero, C. y López-Martín, M. M. (2017). Significados del contraste de hipótesis, configuraciones epistémicas asociadas y algunos conflictos semióticos. *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Disponible en: enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Batanero, C. Díaz-Batanero, C., López-Martín, M.M. y Roldán, A. F. (2020). Interval estimation: methodological approaches and understanding difficulties. *BEIO, Boletín de Estadística e Investigación Operativa, 36*(3), 269-291.

Biehler, R., Frischemeier, D. y Podworny, S. (2017). Reasoning about models and modelling in the context of informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal, 16*(2), 8-12.

Blomhøj, M. y Jensen, T. H. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications 220,* 123-139. https://doi.org/10.1093/teamat/22.3.123.

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H. W. y Niss, M. (2007). *Modelling and applications in mathematics education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_59

Bolstad, W. (2013). *Introduction to Bayesian statistics*, 2ª ed. Wiley.

Borovcnik, M. (2019). Informal and “informal” inference. *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Disponible en www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

Burrill, G. y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill, y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 57-69). Springer.

Case, C. y Jacobbe, T. (2018). A framework to characterize student difficulties in learning information from a simulation-based approach, *Statistics Education Research Journal*, *17*(2), 9-29. https://doi.org/10.52041/serj.v17i2.156

Castro-Sotos, A. E., Vanhoof, S., Noortgate, W. y Onghena, P. (2007). Students’ misconceptions of statistical inference: A review of the empirical evidence from research on statistics education. *Educational Research Review, 2*(2), 98-113. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2007.04.001

Cevikbas, M., Kaiser, G. y Schukajlow, S. A. (2022). Systematic literature review of the current discussion on mathematical modelling competencies: State of the art developments in conceptualizing, measuring, and fostering. *Educational Studies in Mathematics 109,* 205–236 (2022). https://doi.org/10.1007/s10649021101046

Chaput, B., Girard, J. C. y Henry, M. (2011). Frequentist approach: Modelling and simulation in statistics and probability teaching. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 85-95). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_12

Cabriá, S. (1994). *Filosofía de la estadística.* Servicio de Publicaciones de la Universidad de Valencia.

Cobb, G. W. (2007). The introductory statistics course: A Ptolemaic curriculum. *Technology Innovations in Statistics Education, 1*(1), 115. https://doi.org/10.5070/T511000028

Council of Chief State School Officers, CCSSO (2010). *Common core state standards for mathematics*. Council of Chief State School Officers: Disponible en: http://www.corestandards.org/Math/

de la Fuente, E. I. y Díaz-Batanero, C. (2004). Controversias en el uso de la inferencia en la investigación experimental. *Metodología de las Ciencias del Comportamiento, 5*(esp. 1), 161-167.

Díaz-Batanero, C. (2007). *Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Doerr, H.M., Ärlebäck J.B. y Misfeldt M. (2017). Representations of modelling in mathematics education. En: Stillman G., Blum W. y Kaiser G. (Eds.), *Mathematical modelling and applications. International perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 71-81). Springer

Doerr, H. M., Delmas, R. y Makar, K. (2017). A modeling approach to the development of students' informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal, 16*(2), 86-115. https://doi.org/10.52041/serj.v16i2.186

Efron, B. (1979). Bootstrap methods: Another look at the jackknife. *The Annals of Statistics, 7*, 529-563.

Efron, B. y Tibshirani, R. J. (1993). *An introduction to the bootstrap.* Chapman.

Eichler, A. y Vogel, M. (2014). Three approaches for modelling situations with randomness. En E. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking* (pp. 75-99). Springer. https://doi.org/10.1007/9789400771550_4

Gigerenzer, G. (1993). The superego, the ego and the id in statistical reasoning. En G. Keren y C. Lewis (Eds.), *A handbook for data analysis in the behavioural sciences: Methodological issues* (pp. 311-339). Erlbaum.

Godino, J. D. (1996). Mathematical concepts, their meanings and understanding. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference* (Vol. 2, pp. 417-424). Universidad de Valencia.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 22*(23), 237-284.

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM - Mathematics Education, 39*(12), 127-135. https://doi.org/10.1007/s1185800600041

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2019). The ontosemiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 38-43.

Godino, J. D., Burgos, M. y Gea, M. M. (2021). Analysing theories of meaning in mathematics education from the ontosemiotic approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 128*. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1896042

Hacking, I. (2006). *The emergence of probability. A philosopfhical study of early ideas about probability, induction and statistical inference.* Cambridge University Press.

Harradine, A., Batanero, C., y Rossman, A. (2011). Students and teachers' knowledge of sampling and inference. En C. Batanero, G. Burrill, y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 235-246). Springer.

Hald, A. (2008). *A history of parametric statistical inference from Bernoulli to Fisher, 1713-1935.* Springer.

Hall, P. (2003) A short prehistory of the Bootstrap. *Statistical Science, 18,* 158–167.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics, 6*(2), 187-205.

Henry, M. (1997). Notion de modele et modélization en l'enseignement. En M. Henru (Ed.), *Enseigner les probabilités au lycée* (pp. 77-84.) Commission Inter-IREM.

Jones, G. A. y Thornton, C. A. (2005). An overview of research into the teaching and learning of probability. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school* (pp. 65-92). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_4

Kula, F. y Koçer, R. G. (2020). Why is it difficult to understand statistical inference? Reflections on the opposing directions of construction and application of inference framework. *Teaching Mathematics and its Applications, 39*(4), 248-265. https://doi.org/10.1093/teamat/hrz014

Ledesma, R. (2008). Introduccción al Bootstrap. Desarrollo de un ejemplo acompañado de software de aplicación. *Tutorials in Quantitative Methods for Psychology, 4*(2), 51-60.

Lecoutre, B., Lecoutre M. P. y Poitevineau J. (2007). Uses, abuses and misuses of significance tests in the scientific community: Won't the Bayesian choice be unavoidable? *International Statistical Review, 69*, 399-418. https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2001.tb00466.x

Lehrer, R. y Schauble, L. (2010). What kind of explanation is a model? En M. K. Stein (Eds.), *Instructional explanations in the disciplines* (pp. 9-22). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0594-9

Lenhard, J. (2006). Models and statistical inference: The controversy between Fisher and Neyman–Pearson. *The British journal for the philosophy of science, 57,* 69-91.

Lipson, K. (2003) The role of the sampling distribution in understanding statistical inference. *Mathematics Education Research Journal, 15*, 270–287. https://doi.org/10.1007/BF03217383

Lu, X. y Kaiser, G. (2022). Creativity in students' modelling competencies: conceptualisation and measurement. *Educational Studies in Mathematica, 109,* 287–311. https://doi.org/10.1007/s1064902110055y

Makar, K. y Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal, 8(*1), 82-105.

Makar, K. y Rubin, A. (2018). Learning about statistical inference. En D. BenZvi, K, Makar y J.B. Garfield (Eds), *International handbook of research in statistics education* (pp. 261-294). Springer. https://doi.org/10.1007/9783319661957_8

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, MECD (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.* Madrid: Autor

Ministerio de Educación y Formación Profesional, MEFP (2022a). Real Decreto157/2022, de 1 de marzo, porel que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado, 52,* 1-109.

Ministerio de Educación y Formación Profesional, MEFP (2022b). Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, porel que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado, 76,* 41571-41789.

Nickerson, R. S. (2000). Null hypothesis significance testing: a review of an old and continuing controversy. *Psychological methods,* 5(2), 241. https://doi.org/10.1037/1082-989X.5.2.241

Niss, M y Blum, W. (2019). *The learning and teaching of mathematical modelling*. Routledge.

OECD (2013). *PISA 2012 assessment and analytical framework: Mathematics, reading, science, problem solving and financial literacy*. OECD.

Rivadulla, A. (1991). *Probabilidad e inferencia científica.* Barcelona: Anthropos.

Rossman, A. J. (2008). Reasoning about informal statistical inference: One statistician's view. *Statistics Education Research Journal, 7*(2), 5-19.

Saldanha, L. A. y Thompson, P. W. (2002) Conceptions of sample and their relationship to statistical inference. *Educational Studies in Mathematics*, *51*, 257–270. https://doi.org/10.1023/A:1023692604014

Schukajlow, S., Kaiser, G. y Stillman, G. (2018). Empirical research on teaching and learning of mathematical modelling: A survey on the current state-of-the-art. *ZDM - Mathematics Education*, *50*(1), 5-18. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0933-5

Pfannkuch, M., BenZvi, D. y Budgett, S. (2018). Innovations in statistical modeling to connect data, chance and context. *ZDM*, *50*(7), 1113-1123. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0989-2

Pfannkuch, M., y Ziedins, I. (2014). A modelling perspective on probability. En E. Chernoff y B. Sriraman (Ed,), *ProbabilisticThinking* (pp. 101-116). Springer.

Watson, J. y Chance, B. (2012). Building intuitions about statistical inference based on resampling. *Australian Senior Mathematics Journal*, *26*(1), 6-18.

Zieffler, A., Garfield, J. B., del Mas, R. y Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal*, *7*(2), 5-19.

Como citar:

Batanero, C., Begué, N. y Valenzuela-Ruiz, S. (2022). Modelización de la variabilidad muestral en diferentes metodologías de la inferencia. *Revista de Educación Estadística*, *1*(1), 1-22. https://doi.org/10.29035/redes.1.1.2