



CLASSIFICAÇÃO, DEFINIÇÃO E FORMULAÇÃO DE ACONTECIMENTOS DISJUNTOS POR FUTUROS PROFESSORES DOS PRIMEIROS ANOS ESCOLARES

Clasificación, definición y formulación de sucesos disjuntos por futuros maestros

**Classification, definition, and formulation of disjoint events by prospective primary
school teachers**

José António Fernandes¹

Universidade do Minho (Braga, Portugal)

Resumo

Neste artigo relata-se um estudo com estudantes, futuros professores dos primeiros anos escolares, sobre acontecimentos disjuntos, a partir dos objetivos: 1) verificar se dois acontecimentos dados são ou não disjuntos; 2) enunciar a definição de acontecimentos disjuntos; e 3) formular exemplos de acontecimentos disjuntos. Participaram no estudo 37 estudantes do 2.º ano do curso de Licenciatura em Educação Básica, que frequentavam uma universidade do norte de Portugal. Os dados usados no estudo foram as respostas dadas pelos estudantes a uma tarefa com quatro itens, envolvendo a classificação, definição e formulação de acontecimentos disjuntos. Em termos de resultados, a grande maioria dos estudantes foi capaz de classificar os acontecimentos em disjuntos ou não disjuntos, mas tiveram muitas dificuldades em justificar essas classificações, e mais de metade enunciaram a definição correta de acontecimentos disjuntos e formularam exemplos de acontecimentos disjuntos, muitos deles com falhas e erros.

Palavras-chave: Probabilidades, Acontecimentos disjuntos, Futuros professores, Primeiros anos escolares.

Resumen

Este artículo relata un estudio con estudiantes, futuros maestros, sobre sucesos disjuntos, con base en los objetivos: 1) verificar si dos sucesos dados son o no disjuntos; 2) enunciar la definición de sucesos disjuntos; y 3) formular ejemplos de sucesos disjuntos. Participaron en el estudio 37 estudiantes del 2.º año de la Licenciatura en Educación Básica, que frecuentaban una universidad del norte de Portugal. Los datos utilizados en el estudio fueron las respuestas dadas por los estudiantes a una tarea de cuatro ítems, que involucraba la clasificación, definición y formulación de sucesos disjuntos. En cuanto a los resultados, la gran mayoría de los estudiantes fue capaz de clasificar los sucesos en disjuntos o no disjuntos, pero tuvieron grandes dificultades para justificar estas clasificaciones, y más de la mitad dieron la definición correcta de sucesos disjuntos y formularon ejemplos de sucesos disjuntos, muchos de ellos con fallos y errores.

Palabras clave: Probabilidad, Sucesos disjuntos, Futuros maestros, Primeros años escolares.

*Autor de correspondência: jfernandes@ie.uminho.pt (J.A. Fernandes)

¹ <https://orcid.org/0000-0003-2015-160X> (jfernandes@ie.uminho.pt).

Abstract

This article reports a study with students, prospective primary school teachers, on disjoint events, based on the objectives: 1) check whether or not two given events are disjoint; 2) enunciate the definition of disjoint events; and 3) formulate examples of disjoint events. The study involved 37 students in the 2nd year of the Bachelor of Basic Education, who attended a university in the north of Portugal. The data used in the study were the answers given by the students to a four-item task, which involved the classification, definition, and formulation of disjoint events. Regarding the results, the great majority of the students were able to classify the events as disjoint or not disjoint, but they had great difficulties in justifying these classifications, and more than half gave the correct definition of disjoint events and formulated examples of disjoint events, many of them with bugs and errors.

Keywords: Probability, Disjoint events, Prospective teachers, Primary school.

Recibido: 07/04/2022 - Aceptado: 09/09/2022

1. INTRODUÇÃO

Nos últimos tempos, vários investigadores têm defendido o ensino dos temas de Probabilidades e Estatística nos primeiros anos escolares (Batanero, 2013; Borovcnik e Peard, 1996) e mesmo na educação infantil (Alsina, 2021; Batanero et al., 2021; Nikiforidou e Pange, 2010). Este movimento tem-se repercutido na introdução destes temas nos mais variados documentos curriculares, sejam de tipo oficial ou profissional, desde as primeiras idades (MEC, 2018; Ministério da Educação e Ciência, 2013; Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014; National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Em Portugal, o domínio de conteúdo Organização e Tratamento de Dados, que inclui os temas de Probabilidades e Estatística, faz parte do programa da disciplina de matemática de todos os anos do ensino básico, portanto, do 1.º ao 9.º ano de escolaridade (Ministério da Educação e Ciência, 2013). Transitando para o ensino secundário, os alunos, cumprindo também o programa da disciplina de matemática, terão de estudar um tema de Probabilidades ou de Estatística em cada um dos três anos escolares deste ciclo de estudos (Ministério da Educação e Ciência, 2014).

Face às mudanças curriculares, interessa averiguar se os professores em exercício e os futuros professores possuem uma formação que lhes permita desenvolver um ensino adequado dos novos conteúdos introduzidos, em particular nos primeiros anos escolares. Investigações anteriores têm demonstrado que os futuros professores dos primeiros anos revelam dificuldades nos temas de Probabilidades e Estatística, designadamente em definir acontecimentos disjuntos ou incompatíveis, complementares e independentes (Fernandes e Barros, 2021), em calcular probabilidades de acontecimentos envolvendo conetivos lógicos (Fernandes, 2018) e em selecionar e aplicar ferramenta estatísticas na construção e leitura e interpretação

de tabelas, gráficos e medidas estatísticas (Fernandes, 2021; Fernandes e Freitas, 2019).

No presente artigo estuda-se o desempenho de futuros professores dos primeiros anos escolares com foco nos acontecimentos disjuntos (ou incompatíveis ou mutuamente exclusivos), a partir dos três objetivos seguintes: 1) verificar se dois acontecimentos dados são ou não disjuntos; 2) enunciar a definição de acontecimentos disjuntos; e 3) formular exemplos de acontecimentos disjuntos. Por comparação com o estudo de Fernandes e Barros (2021), em que era pedido aos futuros professores dos primeiros anos que formulassem dois acontecimentos disjuntos, na experiência aleatória de lançamento de um dado duas vezes consecutivas, o presente estudo amplia aquele estudo ao considerar-se a definição de acontecimentos disjuntos e a classificação de acontecimentos em disjuntos ou não disjuntos.

Após a apresentação e justificação do estudo, antes descritos, na próxima secção desenvolve-se o enquadramento teórico, sintetizando-se e discutindo-se investigações prévias acerca de diferentes tipos de acontecimentos, e segue-se a secção de metodologia, onde se caracteriza o estudo realizado, os participantes e os métodos de recolha e análise de dados. Na secção seguinte apresentam-se os resultados do estudo a partir dos objetivos estabelecidos e na última secção, de conclusão e discussão, apresentam-se as principais conclusões do estudo, confrontando-as com a literatura revista.

2. ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Na realização de uma experiência aleatória pode concretizar-se cada um dos seus resultados, sendo o conjunto de todos os resultados designado por espaço ou universo de resultados. Ora, nesse espaço de resultados podemos considerar qualquer um dos seus subconjuntos, o qual estabelece um acontecimento numa definição conjuntista.

Os acontecimentos probabilísticos podem ser classificados em diferentes tipologias, designadamente: acontecimentos certos, possíveis (mas não certos) e impossíveis; acontecimentos disjuntos ou incompatíveis ou mutuamente exclusivos; acontecimentos complementares e acontecimentos independentes. O estudo dos acontecimentos certos, possíveis (mas não certos) e impossíveis, nos variados países, é introduzido no início do estudo das Probabilidades, seguindo-se o estudo dos acontecimentos disjuntos e complementares no 9.º ano, no caso português (Ministério da Educação e Ciência, 2013), e o estudo dos acontecimentos independentes no 12.º ano, no caso português (Ministério da Educação e Ciência, 2014).

Muitas investigações têm sido realizadas envolvendo acontecimentos certos, possíveis (mas não certos) e impossíveis, seja envolvendo a classificação, seja a formulação de acontecimentos desses tipos. Por

exemplo, Fischbein et al. (1991), num estudo com alunos dos anos escolares compreendidos entre o 4.º e o 8.º ano (inclusive), verificaram que os alunos classificaram e formularam corretamente acontecimentos certos, possíveis e impossíveis nas experiências de lançamento de um dado e de girar uma roleta dividida em 90 partes iguais, tendo-se revelado mais difíceis os acontecimentos certos e a formulação de acontecimentos comparativamente com a classificação. Nesse estudo verificou-se, ainda, uma pequena melhoria das respostas com a idade em todos os itens e com o estudo prévio de probabilidades na maioria dos itens.

Analogamente, no estudo de Fernandes (2000) verificou-se que a grande maioria dos alunos do 8.º e 11.º ano, que participaram no estudo, classificaram corretamente acontecimentos certos, possíveis e impossíveis nas experiências de lançamento de um dado e de extração de bolas de um saco, tendo-se mostrado mais difíceis os acontecimentos certos e/ou que envolviam conetivos lógicos. Neste estudo constatou-se, ainda, um aumento sistemático da percentagem de respostas corretas com o ano escolar e com o desempenho em matemática. Num estudo posterior, as dificuldades com a introdução de conetivos lógicos agravaram-se quando foi pedido a futuros professores dos primeiros anos para determinar probabilidades de acontecimentos envolvendo os conetivos *e* e *ou* (Fernandes, 2018), tendo-se obtido percentagens de respostas corretas de 43,5% e 17,4%, respetivamente.

Também no estudo de Fernandes e Barros (2005), em que participaram futuros professores dos primeiros anos, se mostrou que os estudantes revelaram um elevado desempenho na classificação e formulação de acontecimentos certos, possíveis e impossíveis, variando a percentagem de respostas corretas entre 78% e 97%. Tal como nos estudos anteriores, os estudantes tiveram dificuldades um pouco superiores na formulação do que na classificação de acontecimentos e na classificação de acontecimentos certos em relação a outros tipos de acontecimentos.

Voltando de novo ao estudo de Fernandes (2000), demonstrou-se que as dificuldades de alunos do 9.º ano, que ainda não tinham estudado probabilidades na escola, aumentaram muito quando foram questionados para distinguirem acontecimentos quase certos (com probabilidade próxima de 1) de acontecimentos certos e acontecimentos quase impossíveis (com probabilidade próxima de 0) de acontecimentos impossíveis. Nestes questionamentos, muitos alunos consideraram os acontecimentos quase certos como sendo certos e os acontecimentos quase impossíveis como sendo impossíveis. Dificuldades análogas foram também observadas por Green (1982) em alunos de idades compreendidas entre os 11 e 16 anos.

Posteriormente, Fernandes, Gea e Correia (2016) realizaram um estudo, com professores dos primeiros

anos, acerca da definição de acontecimentos certos no processo de extração de berlindes de um saco, contendo berlindes vermelhos, verdes e brancos. Especificamente, questionavam-se os estudantes sobre o número de berlindes que era necessário retirar do saco para garantir, com certeza, a obtenção de pelo menos um berlinde de uma cor, de dois berlindes de duas cores ou de um berlinde de cada cor. Em termos de resultados, constatou-se que os estudantes tiveram muitas dificuldades, que aumentaram sistematicamente da garantia de extrair pelo menos um berlinde de uma cor para a garantia de extrair pelo menos dois berlindes de duas cores e desta para a garantia de extrair pelo menos um berlinde de cada cor. No caso da garantia de extrair pelo menos um berlinde de cada uma das três cores, os futuros professores do estudo de Fernandes e Barros (2005) sentiram dificuldades semelhantes, os futuros professores do estudo de Ortiz e Mohamend (2014) tiveram um desempenho um pouco melhor, talvez por serem futuros professores do ensino secundário, e os alunos do 5.º ao 7.º ano (10-13 anos), do estudo de Fischbein e Gazit (1984), tiveram mais dificuldades ainda.

Na tipologia de acontecimentos disjuntos ou incompatíveis e complementares a investigação é mais escassa, sendo mais frequentes os estudos sobre probabilidade condicional e independência.

Segundo Oliveira (1990), a definição formal de probabilidade firma-se nos três axiomas seguintes: 1) $P(A) \geq 0$, sendo A um acontecimento qualquer; 2) $P(U) = 1$, sendo U o espaço de resultados; e 3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, sendo A e B acontecimentos disjuntos. Consta-se, assim, que no axioma 3) intervém a noção de acontecimentos disjuntos e nos axiomas 2) e 3) está subjacente a noção de acontecimentos complementares, quando $A \cup B = U$. Conclui-se, portanto, que a definição axiomática de probabilidade implica as noções de acontecimentos disjuntos e complementares.

A propósito da definição de acontecimentos disjuntos ou incompatíveis e independentes, Martins (2017) chama a atenção para o facto de que dois acontecimentos não podem ser disjuntos e independentes, a não ser que um deles seja impossível, e da frequente confusão entre os conceitos de acontecimentos independentes e incompatíveis. Neste último caso, deve ter-se em atenção que estes conceitos exprimem relações diferentes: a incompatibilidade de acontecimentos é uma propriedade intrínseca dos acontecimentos, não sendo necessário definir qualquer probabilidade, e a independência de acontecimentos está dependente do modelo de probabilidade definido no espaço de resultados onde estão definidos os acontecimentos.

No estudo de Fernandes e Barros (2021), em que participaram futuros professores dos primeiros anos, estiveram implicados acontecimentos disjuntos, complementares e independentes. Mais concretamente, foi pedido aos estudantes para darem pares de exemplos de acontecimentos disjuntos, complementares e

independentes na experiência aleatória de lançamento de um dado duas vezes consecutivas. Em termos de resultados, verificou-se que os estudantes sentiram muitas dificuldades em formular os acontecimentos, obtendo-se a percentagem de respostas corretas de 42% nos acontecimentos disjuntos mas não complementares, 13% nos acontecimentos complementares e 23% nos acontecimentos independentes. Tal com neste estudo, Fernandes (2018) constatou também que futuros professores dos primeiros anos consideraram como sendo incompatíveis acontecimentos não disjuntos.

Também Munisamy e Doraisamy (1998), num estudo com alunos malaios do 4.º e do 6.º ano do ensino secundário (12-15 anos), verificaram que se revelaram mais difíceis para os alunos os conceitos de frequência relativa, acontecimento complementar, acontecimentos compostos, lei aditiva de probabilidades e probabilidade condicionada. O autor observou, ainda, que a lei de multiplicação de probabilidades foi particularmente difícil para os alunos.

Num estudo mais recente, Fernandes e Júnior (in press) propuseram uma tarefa a futuros professores dos primeiros anos, com quatro itens, envolvendo relações entre acontecimentos disjuntos e complementares. Nesses itens, questionavam-se os estudantes sobre a verdade ou falsidade das relações e as correspondentes justificações. Quanto à verdade/falsidade das relações, obteve-se, em média, 53% de respostas corretas por item, o que pode considerar-se um desempenho razoável. Já em termos das justificações, o desempenho piorou, sendo que por item, em média, 43% dos estudantes apresentaram justificações irrelevantes ou não apresentaram qualquer justificação. Dessa percentagem, 21% estão associadas a resposta corretas, o que agrava consideravelmente o desempenho dos estudantes. Além disso, muitas das restantes justificações apresentam limitações quer em relação às definições e relações dos acontecimentos, quer em relação à prova baseada num exemplo ou em diagrama(s) de Venn.

Tendo em vista promover a aprendizagem dos conceitos de acontecimentos disjuntos e complementares, Ramírez-Montes e Henriques (2018) conduziram uma intervenção de ensino exploratório (Canavarro, 2011) numa turma de alunos do 10.º ano, da Costa Rica, recorrendo à simulação no GeoGebra. Nessas simulações determinavam-se valores de $P(A)$, $P(\bar{A})$, $P(B)$, $P(\bar{B})$, $P(A \cap B)$ e $P(A \cup B)$, estudando-se, de seguida, a relação $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, que permite identificar acontecimentos disjuntos, e a relação $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, que permite identificar acontecimentos complementares. Na realização da tarefa exploratória, os estudantes devem interpretá-la para assegurar a sua correta compreensão, explorá-la individualmente, em pares ou pequenos grupos, discutir os resultados obtidos numa vertente argumentativa e participar no estabelecimento de sínteses de formalização e validação institucional. Do estudo, os autores concluíram que a tarefa exploratória permitiu aos alunos aprenderem aqueles

conceitos, embora alguns deles ainda sentissem algumas dificuldades nos acontecimentos complementares, e advogam que o “estudo pode fornecer, assim, um referencial para professores trabalharem os conceitos de acontecimentos disjuntos e complementares” (p. 791).

3. METODOLOGIA

Neste estudo pretende-se investigar o conhecimento de estudantes, futuros professores dos primeiros anos escolares, sobre acontecimentos disjuntos ou incompatíveis segundo os três objetivos: 1) verificar se dois acontecimentos dados são ou não disjuntos; 2) enunciar a definição de acontecimentos disjuntos; e 3) formular exemplos de acontecimentos disjuntos. Esta abordagem ao conceito de acontecimentos disjuntos, a partir dos três objetivos, incluindo a exploração de exemplos e a definição do conceito, tem a vantagem de permitir estudar em maior abrangência a compreensão do conceito pelos estudantes (Skemp, 1993).

Participaram no estudo 37 estudantes do 2.º ano do curso de Licenciatura em Educação Básica, de uma universidade do norte de Portugal. Os estudantes, à entrada na universidade, tinham uma formação matemática variada obtida no ensino secundário em cursos profissionais, em cursos humanísticos ou em cursos científico-tecnológicos.

Os dados do estudo resultaram da aplicação de um questionário com várias tarefas sobre diferentes tipos de acontecimentos, das quais tratamos aqui aquela que diz respeito a acontecimentos disjuntos ou incompatíveis, e que se mostra na Figura 1.

Figura 1

Tarefa proposta aos estudantes

1. Em cada alínea seguinte, verificar se os acontecimentos **A** e **B** são ou não **disjuntos** (ou **incompatíveis**), sendo:
 - a) **A**: “obter um número inferior a 3” e **B**: “obter um número superior a 3”, na experiência aleatória de lançamento de um dado numerado de 1 a 6.
 - b) **A**: “obter pelos menos uma face cara” e **B**: “obter duas faces cara”, na experiência aleatória de lançamento de duas moedas ao ar.
2. Relativamente a uma experiência aleatória,
 - a) Defina quando é que dois acontecimentos **A** e **B** são **disjuntos**.
 - b) Defina dois acontecimentos **A** e **B**, diferentes dos que foram definidos na questão 1, que sejam **disjuntos**.

Na tarefa proposta incluem-se duas questões, num total de quatro itens. Em cada um dos itens 1a) e 1b)

é definido um par de acontecimentos relativo à experiência aleatória de lançamento de um dado e de lançamento de duas moedas, respetivamente, e questionam-se os estudantes sobre se os acontecimentos são ou não disjuntos. Em termos de resposta, espera-se que os estudantes verifiquem que os acontecimentos são disjuntos em 1a) e não disjuntos em 1b). No item 2a) é pedido aos estudantes que enunciem a definição de acontecimentos disjuntos, esperando-se que estabeleçam a relação $A \cap B = \emptyset$ ou $P(A \cap B) = 0$ ou um enunciado equivalente em linguagem corrente. Por fim, no item 2b), tratando-se de um item de resposta aberta, espera-se que os estudantes formulem dois acontecimentos disjuntos de uma experiência aleatória, distintos dos que foram indicados nos itens 1a) e 1b).

No momento da aplicação do questionário os estudantes tinham frequentado, no ensino superior, a unidade curricular de Probabilidades e Estatística, e assegurou-se o anonimato dos estudantes, a restrição das pessoas com acesso aos dados e a salvaguarda da confidencialidade dos participantes em qualquer publicação com dados do estudo.

Finalmente, em relação ao tratamento e análise de dados, estudaram-se as respostas dadas pelos estudantes relativamente aos tipos de acontecimentos (disjuntos e não disjuntos) e às justificações dessas respostas. Em ambos os casos, determinaram-se frequências dos tipos de resposta e das justificações das respostas, tendo-se recorrido a tabelas para resumir essa informação. Adicionalmente, para aprofundar a compreensão do processo de análise, particularmente as inferências realizadas, apresentam-se, ainda, alguns exemplos de respostas dos estudantes, identificados pela letra E (abreviatura de estudante) seguida do número que lhe foi atribuído (de 1 a 37).

4. APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS

Nesta secção apresentam-se os resultados do estudo, organizados nas subsecções seguintes: verificar se acontecimentos são ou não disjuntos, definir acontecimentos disjuntos e formular acontecimentos disjuntos.

4.1. Verificar se acontecimentos são ou não disjuntos

Nos dois itens da questão 1, esperava-se que os estudantes classificassem como sendo disjuntos os acontecimentos do item 1a) e não disjuntos os acontecimentos do item 1b). Seguidamente, analisam-se as respostas dadas pelos estudantes a cada um desses itens.

Item 1a). Neste item verificou-se que 32 (86%) estudantes responderam que os acontecimentos são

disjuntos, que é a resposta correta, 4 (11%) responderam que não são disjuntos e 1 (3%) não respondeu. Perante estes resultados, conclui-se que uma elevada percentagem de estudantes identificou corretamente que os acontecimentos são disjuntos.

De seguida, tendo em vista aprofundar a compreensão dos estudantes, analisam-se as justificações por eles indicadas para fundamentarem as suas respostas. Na Tabela 1 apresentam-se as frequências (em %) dos tipos de justificação apresentados pelos estudantes, segundo os tipos de acontecimentos.

Tabela 1

Frequências (em %) dos tipos de justificação no item 1a)

Justificação	Acontecimentos		Total
	Disjuntos	Não disjuntos	
Correta e completa	5 (13)	—	5 (13)
Incompleta e/ou com erros	19 (51)	3 (8)	22 (59)
Sem justificação	8 (22)	1 (3)	9 (25)

Nota. As percentagens foram calculadas considerando a totalidade dos participantes, que é 37.

Da Tabela 1 salienta-se que cerca de metade dos estudantes apresentaram justificações incompletas e/ou com erros, segue-se a percentagem daqueles que não apresentaram qualquer justificação e, por fim, em menor percentagem encontram-se os que apresentaram justificações corretas e completas.

Nas justificações corretas e completas, os estudantes começaram por definir, em extensão, os acontecimentos A e B e, de seguida, verificaram que $A \cap B = \emptyset$. Na Figura 2 apresenta-se um exemplo deste tipo de justificação.

Figura 2

Justificação apresentada pelo estudante E₂₃ no item 1a)

$A = \{1, 2\}$
 $B = \{4, 5, 6\}$
 $A \cap B = \{1, 2\} \cap \{4, 5, 6\} = \emptyset$
 \therefore Os acontecimentos são disjuntos.

O estudante E₂₃ definiu cada um dos acontecimentos A e B e determinou a sua interseção, obtendo o conjunto vazio. Deste modo, ele conclui corretamente que os acontecimentos são disjuntos.

Já as justificações incompletas e/ou com erros foram muito diversas, salientando-se decisões tomadas com base em probabilidades e a confusão entre acontecimentos e probabilidades. Além disso, poucos estudantes definiram, em extensão, apenas os acontecimentos A e B , afirmaram que $A \neq B$, argumentaram que 3 não pertence a A nem a B , parecendo confundir acontecimentos disjuntos com acontecimentos complementares, e cometeram erros na definição dos acontecimentos implicados na definição de acontecimentos disjuntos. A seguir, na Figura 3, apresenta-se um exemplo deste tipo de justificação.

Figura 3

Justificação apresentada pelo estudante E_{36} no item 1a)

São disjuntos

$$P(A) = \frac{2}{6} \quad P(B) = \frac{3}{6} \quad P(A \cap B) = \{\emptyset\}$$

A justificação do estudante E_{36} envolve a determinação das probabilidades $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$. Os valores de $P(A)$ e $P(B)$ são corretos, mas não se percebe como obteve $P(A \cap B)$ e define essa probabilidade por um conjunto (de tipo 2, ou seja, um conjunto de conjuntos), parecendo confundir probabilidades com acontecimentos. Trata-se, portanto, de uma justificação incompleta ao não explicitar a determinação de $P(A \cap B)$ e com o erro de não atribuir a esta probabilidade um valor do intervalo $[0, 1]$.

Embora se tenha salientado antes que muitos estudantes identificaram, corretamente, os acontecimentos como sendo disjuntos, constata-se, agora, que grande parte dessas respostas foi acompanhada de justificações incompletas e/ou com erros, ou não apresentaram mesmo qualquer justificação. Portanto, este tipo de justificação ou a ausência de justificação questiona a real compreensão dos estudantes acerca do conceito de acontecimentos disjuntos. Embora se possa admitir que os estudantes têm uma compreensão um tanto vaga do conceito, pode afirmar-se que eles tiveram dificuldades em expressar verbalmente o seu entendimento.

Item 1b). Neste item constatou-se que 26 (70%) estudantes responderam que os acontecimentos não são disjuntos, que é a resposta correta, 9 (24%) responderam que são disjuntos e 2 (6%) não responderam. Tal como no item anterior, conclui-se que uma elevada percentagem de estudantes identificou corretamente que os acontecimentos não são disjuntos.

Na continuação, para aprofundar a compreensão dos estudantes, analisam-se as justificações por eles

referidas para explicarem as suas respostas. Na Tabela 2 apresentam-se as frequências (em %) dos tipos de justificação apresentados pelos estudantes, segundo os tipos de acontecimentos.

Tabela 2

Frequências (em %) dos tipos de justificação no item 1b)

Justificação	Acontecimentos		Total
	Disjuntos	Não disjuntos	
Correta e completa	—	7 (19)	7 (19)
Incompleta e/ou com erros	8 (22)	15 (40)	23 (62)
Sem justificação	1 (3)	4 (11)	5 (14)

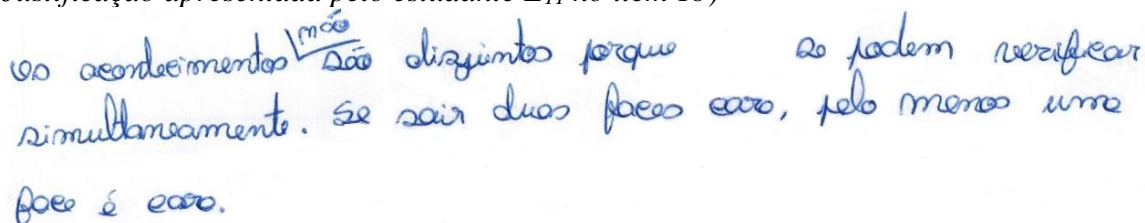
Nota. As percentagens foram calculadas considerando a totalidade dos participantes, que é 37.

Pela Tabela 2 verifica-se que as justificações incompletas e/ou com erros continuam a ser largamente maioritárias, como aconteceu no item anterior, seguindo-se as justificações corretas e as respostas sem qualquer justificação.

Nas justificações corretas e completas, alguns estudantes definiram, em extensão, os acontecimentos A e B , enquanto outros observaram que o resultado (cara, cara) pertence tanto a A como a B , verificando em ambos os casos que $A \cap B \neq \emptyset$ e concluindo que os acontecimentos não são disjuntos. Na Figura 4 apresenta-se um exemplo do segundo caso.

Figura 4

Justificação apresentada pelo estudante E_{11} no item 1b)



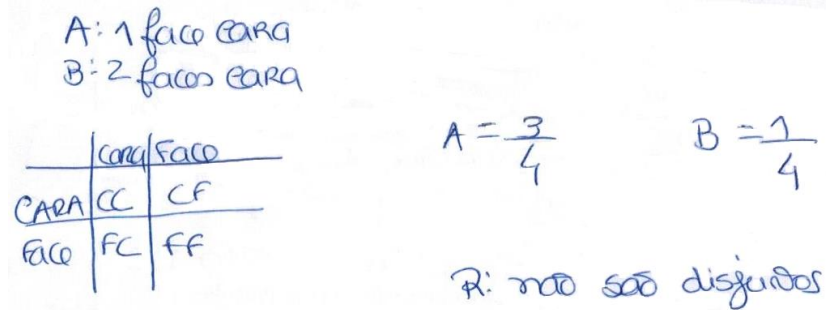
os acontecimentos ^{mão} são disjuntos porque se podem verificar simultaneamente. se sair duas faces cara, pelo menos uma face é cara.

O estudante E_{11} , ao reconhecer que o resultado (cara, cara) tem pelo menos uma cara, implicitamente admite que o resultado (cara, cara) é comum aos dois acontecimentos, concluindo corretamente que os acontecimentos não são disjuntos.

Tal como no item anterior, também neste item as justificações incompletas e/ou com erros foram largamente maioritárias e diversificadas, salientando-se aquelas que resultam da determinação de probabilidades, em que se confundem acontecimentos e probabilidades e em que se definem incorretamente os acontecimentos. Na Figura 5 apresenta-se um exemplo deste tipo de justificação.

Figura 5

Justificação apresentada pelo estudante E₅ no item 1b)



O estudante E₅ descreve o espaço de resultados através de uma tabela de dupla entrada, determina as probabilidades dos acontecimentos, que confunde com os próprios acontecimentos, e conclui, sem se saber como, que os acontecimentos não são disjuntos.

Seja na classificação correta como incorreta dos acontecimentos, muitos estudantes (43%) definiram o espaço de resultados recorrendo, muitas vezes, a uma tabela de dupla entrada ou, poucas vezes, a um diagrama de árvore.

Em resumo, no objetivo “verificar se dois acontecimentos dados são ou não disjuntos”, itens 1a) e 1b), constatou-se que os estudantes foram bastante sucedidos em classificar acontecimentos dados em disjuntos ou não disjuntos, mas revelaram muitas dificuldades em justificar essas respostas.

4.2. Definir acontecimentos disjuntos

No item 2a), da questão 2, pede-se aos estudantes para definirem o que são acontecimentos disjuntos (ou incompatíveis), tendo-se obtido os resultados que constam da Tabela 3.

Tabela 3

Frequências (em %) dos tipos de definição no item 2a)

Definição	Frequência (em %)
Correta e completa	22 (59)
Incompleta e/ou com erros	7 (19)
Totalmente incorreta	8 (22)

Nota. As percentagens foram calculadas considerando a totalidade dos participantes, que é 37.

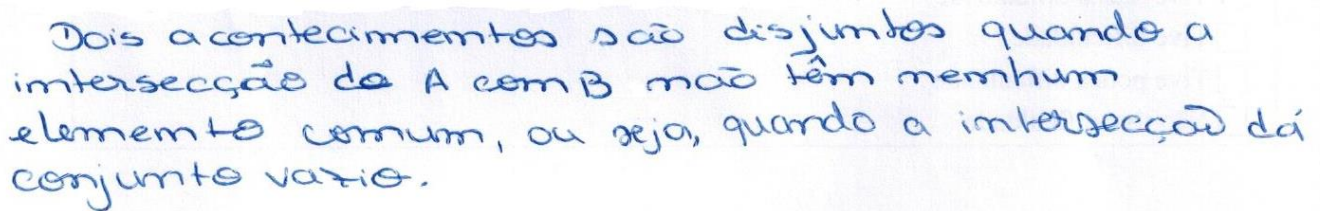
Pela Tabela 3 verifica-se que mais de metade dos estudantes apresentaram definições corretas e completas, seguindo-se, quase em igual número, aqueles que apresentaram definições incompletas e/ou

com erros e totalmente incorretas, cada uma destas últimas em número consideravelmente inferior.

As definições corretas e completas consistiram em afirmar a relação $A \cap B = \emptyset$ e/ou $P(A \cap B) = 0$, eventualmente enunciadas através de um registo verbal, como se exemplifica na Figura 6.

Figura 6

Definição apresentada pelo estudante E_2 no item 2a)



Dois acontecimentos são disjuntos quando a interseção de A com B não tem nenhum elemento comum, ou seja, quando a interseção dá conjunto vazio.

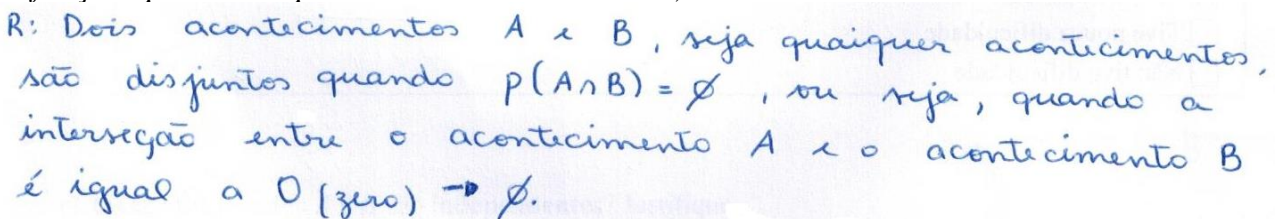
O estudante E_2 apresenta a definição de acontecimentos disjuntos recorrendo a linguagem corrente e foca-se na relação $A \cap B = \emptyset$, ou seja, que o acontecimento interseção é impossível, sem utilizar a notação simbólica.

As definições incompletas e/ou com erros resultaram, quase sempre, da confusão entre acontecimento impossível e probabilidade zero, o que se traduziu em afirmar que $A \cap B = 0$ (zero) e/ou $P(A \cap B) = \emptyset$.

Na Figura 7 apresenta-se um exemplo deste tipo de justificação.

Figura 7

Definição apresentada pelo estudante E_{28} no item 2a)



R: Dois acontecimentos A e B, seja quaisquer acontecimentos, são disjuntos quando $p(A \cap B) = \emptyset$, ou seja, quando a interseção entre o acontecimento A e o acontecimento B é igual a 0 (zero) $\rightarrow \emptyset$.

Na definição que apresenta, o estudante E_{28} enuncia duas relações, uma em termos de probabilidades e outra em termos de acontecimentos, mas considera, erradamente, na probabilidade o conjunto \emptyset e no acontecimento interseção o valor 0 (zero).

Por fim, nas definições totalmente incorretas, os estudantes apresentaram enunciados sem qualquer relação com a conceito de acontecimentos disjuntos ou afirmaram mesmo a definição contrária. A definição contrária foi referida pela maioria (5) desses estudantes, tendo o estudante E_{13} afirmado que “A e B são disjuntos quando a sua interseção não é o vazio”.

Em síntese, no objetivo “enunciar a definição de acontecimentos disjuntos”, item 2a), mais de metade dos estudantes foram capazes de apresentar a definição de acontecimentos disjuntos, o que representa um grande aumento quando comparado com a frequência de estudantes que expressaram justificações corretas e completas na classificação de acontecimentos.

4.3. Formular acontecimentos disjuntos

Por fim, no item 2b) pede-se aos estudantes para definirem dois acontecimentos disjuntos diferentes daqueles que tinham sido dados antes, nos itens 1a) e 1b). A partir da análise das respostas, verificou-se que 25 (68%) estudantes apresentaram acontecimentos disjuntos, 10 (27%) apresentaram acontecimentos não disjuntos e 2 (5%) não responderam.

Apesar de cerca de dois estudantes em cada três indicarem acontecimentos disjuntos, uma análise detalhada subsequente revelou falhas em muitas dessas respostas, como se verifica na Tabela 4, onde se apresentam as frequências (em %) dos tipos de resposta avançados pelos estudantes segundo o tipo de acontecimentos.

Tabela 4

Frequências (em %) dos tipos de resposta no item 2b)

Resposta	Acontecimentos		Total
	Disjuntos	Não disjuntos	
Correta e completa	12 (35)	—	12 (35)
Incompleta e/ou com erros	13 (32)	8 (22)	21 (54)
Incompreensível	—	2 (5)	2 (5)

Nota. As percentagens foram calculadas considerando a totalidade dos participantes, que é 37.

Cerca de um estudante em cada três apresentou uma resposta correta e completa, na qual é enunciada a experiência aleatória implicada e são definidos os dois acontecimentos disjuntos. Na Figura 8 é apresentado um exemplo deste tipo de resposta.

Figura 8

Resposta apresentada pelo estudante E₆ no item 2b)

A: obter 2 faces cara } no pensamento de 2
B: obter 2 faces nacional. } moedas

O estudante E_6 refere os dois acontecimentos disjuntos da experiência aleatória de lançamento de duas moedas ao ar, sem verificar que esses acontecimentos são realmente disjuntos. A verificação de que os acontecimentos indicados são disjuntos foi efetuada por dois estudantes apenas. Diferentemente dos itens 1a) e 1b), em que se pede para verificar se os acontecimentos indicados são ou não disjuntos, talvez a maior percentagem de respostas corretas e completas neste item se deva à não exigência dessa verificação.

Na globalidade dos acontecimentos disjuntos e não disjuntos, constata-se que mais de metade dos estudantes apresentaram respostas incompletas e/ou com erros. Neste tipo de resposta, além de outras falhas, realça-se que a maior parte destes estudantes (17) não referiram a experiência aleatória relativa aos acontecimentos. Dos estudantes que referiram a experiência aleatória, destacam-se as experiências aleatórias de lançamento um dado (7 estudantes), extração de um objeto de um saco (4 estudantes), extração de dois objetos de um saco (2 estudantes), seguindo-se com apenas um estudante, o lançamento de uma moeda, girar uma roleta, o lançamento de duas moedas e a extração de três bolas de um saco.

Em resumo, tendo em conta as justificações, no objetivo “formular exemplos de acontecimentos disjuntos”, item 2b), verificou-se que os estudantes foram mais sucedidos do que em “verificar se dois acontecimentos dados são ou não disjuntos” e menos sucedidos do que em “definir acontecimentos disjuntos”.

5. CONCLUSÃO E DISCUSSÃO

Na classificação de acontecimentos em disjuntos ou não disjuntos, itens 1a) e 1b), verificou-se que à volta de três em cada quatro estudantes classificaram corretamente os acontecimentos dados em disjuntos ou não disjuntos, o que pode ser considerado um bom desempenho. O melhor desempenho no item 1a), relativamente ao item 1b), pode dever-se ao facto de estar envolvida uma experiência aleatória simples (lançamento de um dado), enquanto no item 1b) está envolvida uma experiência aleatória composta (lançamento de duas moedas), pois a literatura mostra que os estudantes revelam muitas mais dificuldades nos acontecimentos de experiências compostas do que nos acontecimentos de experiências simples (Fernandes, 2000; Fernandes et al., 2016; Munisamy e Doraisamy, 1998).

Apesar do bom desempenho dos estudantes na identificação do tipo de acontecimentos, disjuntos ou não disjuntos, raramente eles apresentaram justificações corretas e completas em qualquer dos dois itens, 1a) e 1b), e a grande parte apresentou justificações incompletas e/ou com erros ou não apresentaram qualquer justificação.

Na definição de acontecimentos disjuntos, mais de metade dos estudantes apresentaram definições corretas e completas. Foi neste objetivo, item 2a), que os estudantes tiveram um melhor desempenho. Contudo, pode questionar-se se eles apenas memorizam as definições, sem as compreendem verdadeiramente, pois tiveram dificuldade em aplicar essas definições aos restantes itens do estudo e, assim, apresentarem justificações corretas e completas.

Por último, na formulação de acontecimentos disjuntos constatou-se que mais de metade dos estudantes definiram acontecimento disjuntos, embora com algumas falhas, sobretudo ao não mencionarem a experiência aleatória subjacente aos acontecimentos. Retirando essas respostas com falhas, reduziu-se a cerca de metade a percentagem de respostas corretas e completas. No estudo de Fernandes e Barros (2021), em que também foi pedido a estudantes, futuros professores dos primeiros anos, que formulassem acontecimentos disjuntos, obteve-se um desempenho um pouco superior. Esta discrepância pode ter resultado de se ter referido a experiência aleatória na qual se devia formular os acontecimentos disjuntos, o que não aconteceu no presente estudo, no qual se esperava que os estudantes definissem os acontecimentos e a respetiva experiência aleatória.

Ao longo das três dimensões do estudo, correspondentes a cada um dos objetivos, existe uma percentagem elevada de justificações incompletas e/ou com erros, com mais de metade na classificação de acontecimentos em disjuntos ou não disjuntos e na formulação de acontecimentos disjuntos, e menos na definição de acontecimentos disjuntos. Adicionalmente, uma percentagem considerável de estudantes não justificou as suas escolhas na classificação de acontecimentos em disjuntos ou não disjuntos e apresentaram respostas totalmente incorretas na definição de acontecimentos disjuntos.

No caso das falhas e erros, salienta-se nas várias dimensões do estudo o uso inapropriado de probabilidades para classificar e definir acontecimentos disjuntos, a confusão entre acontecimentos e probabilidades e a não especificação da experiência aleatória implicada na formulação de acontecimentos disjuntos. Todas estas dificuldades parecem resultar de um substrato teórico débil e pouco integrado (Ausubel et al., 1980; Skemp, 1993), o qual deve ser aprofundado para que os futuros professores possam vir a desenvolver um ensino adequado.

A exploração de tarefas semelhantes à que foi aqui estudada poderá contribuir para que os estudantes possam ultrapassar as dificuldades evidenciadas neste estudo, pois a distinção entre acontecimentos disjuntos e não disjuntos e a formulação de exemplos desses tipos de acontecimentos, acompanhada da verificação dos respetivos atributos, permitirá, certamente, aprofundar a compreensão dos estudantes.

Ainda para obviar às limitações observadas dos estudantes, parece promissor a implementação de um

Fernandes, J.A. (2022). Classificação, definição e formulação de acontecimentos disjuntos por futuros professores dos primeiros anos escolares. *Revista de Educación Estadística*, 1(1), 1-18. <https://doi.org/10.29035/redes.1.1.1>

ensino exploratório e com recurso à simulação, tal como Ramírez-Montes e Henriques (2018) experimentaram. Uma vez que nesse ensino se valoriza a interpretação, a exploração, a discussão e a síntese, ele promove, portanto, a compreensão e a explicação acerca dos objetos matemáticos e das suas relações.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alsina, Á. (2021). “Ça commence aujourd'hui”: alfabetización estadística y probabilística en la educación matemática infantil. *PNA Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 15(4), 243-266.
- Ausubel, D., Novak, J. e Hanesian, H. (1980). *Psicologia educacional*. Interamericana.
- Batanero, C. (2013). La comprensión de la probabilidad en los niños: ¿Qué podemos aprender de la investigación? In J. A. Fernandes, P. F. Correia, M. H. Martinho e F. Viseu (Eds.), *Atas do III Encontro de probabilidades e estatística na escola* (pp. 9-21). Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.
- Batanero, C., Álvarez, R. A., Hernández-Solis, L. A. e Gea, M. M. (2021). El inicio del razonamiento probabilístico en educación infantil. *PNA Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 15(4), 267-288.
- Borovcnik, M. e Peard, R. (1996). Probability. In A. J. Bishop et al. (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 239-287). Kluwer Academic Publishers.
- Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, 115, 11-17.
- Fernandes, J. A. (2000). *Intuições e aprendizagem de probabilidades: uma proposta de ensino de probabilidades no 9.º ano de escolaridade*. Tese de doutoramento, Universidade do Minho, Braga, Portugal.
- Fernandes, J. A. (2018). Probabilidade de acontecimentos envolvendo aspetos lógicos. *Bolema*, 32(60), 172-190.
- Fernandes, J. A. (2021). Compreensão de futuros professores dos efeitos nas medidas de tendência central ao se acrescentar novos dados a um conjunto. *Bolema*, 35(71), 1825-1844.
- Fernandes, J. A. e Barros, P. M. (2005). Dificuldades de futuros professores do 1.º e 2.º ciclos em estocástica. In *Actas do V Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática (CIBEM)*. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.
- Fernandes, J. A. e Barros, P. M. (2021). Definir acontecimentos incompatíveis, complementares e independentes. *Indagatio Didactica*, 13(1), 31-42.
- Fernandes, J. A. e Freitas, A. (2019). Selection and Application of graphical and numerical statistical tools by prospective primary school teachers. *Acta Scientiae*, 21(6), 82-97.
- Fernandes, J. A. e Júnior, A. P. O. (in press). Relacionar acontecimentos disjuntos e complementares.
- Fernandes, J. A., Gea, M. M. e Correia, P. F. (2016). Definição de acontecimentos certos na extração de berlinde de um saco. *Acta Scientiae*, 18(1), 83-100.
- Fernandes, J. A., Gea, M. M., e Batanero, C. (2016). Conocimiento de futuros profesores de Educación Primaria sobre probabilidad en experiencias compuestas. In J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández e A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp.217-225). SEIEM.
- Fischbein, E. e Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions?

Fernandes, J.A. (2022). Classificação, definição e formulação de acontecimentos disjuntos por futuros professores dos primeiros anos escolares. *Revista de Educación Estadística*, 1(1), 1-18. <https://doi.org/10.29035/redes.1.1.1>

Educational Studies in Mathematics, 15(1), 1-24.

Fischbein, E., Nello, M. S. e Marino, M. S. (1991). Factors affecting probabilistic judgments in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics*, 22(6), 523-549.

Green., D. R. (1982). *Probability concepts in 11-16 year old pupils*. Centre for Advancement of Mathematical Education in Technology, Loughborough University of Technology.

Martins, E. G. M. (2017). Acontecimentos independentes. *Revista de Ciência Elementar*, 5(4), 1-4.

MEC. (2018). *Base Nacional Comum Curricular - Educação é a Base*. Ministério da Educação.

Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico*. Autor.

Ministério da Educação e Ciência (2014). *Programa e Metas Curriculares de Matemática A*. Autor.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria*. Autor.

Munisamy, S. e Doraisamy, L. (1998). Levels of understanding of probability concepts among secondary school pupils. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 29(1), 39-45.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Autor.

Nikiforidou, Z. e Pange, J. (2010). The notions of chance and probabilities in preschoolers. *Early Childhood Education Journal*, 38(4), 305-311.

Oliveira, J. T. (1990). *Probabilidades e Estatística: conceitos, métodos e aplicações*. McGraw-Hill.

Ortiz, J. J. e Mohamend, N. (2014). Conocimiento de futuros profesores sobre espacio muestral. *Cuadrante*, 23(2), 5-22.

Ramírez-Montes, G. e Henriques, A. (2018). A aprendizagem dos conceitos de acontecimentos disjuntos e complementares com recurso ao GeoGebra. In Pedro, A., Piedade, J., Matos, J. F., Dorotea, N. e Pedro, N. (Eds.), *Atas do V Congresso Internacional das TIC na Educação* (pp. 780-793). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Skemp, R. R. (1993). *The psychology of learning mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates.

Como citar:

Fernandes, J.A. (2022). Classificação, definição e formulação de acontecimentos disjuntos por futuros professores dos primeiros anos escolares. *Revista de Educación Estadística*, 1(1), 1-18. <https://doi.org/10.29035/redes.1.1.1>



Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional.